PAUL LEGER, GRECIA GÁLVEZ, LINO CUBILLOS, DIEGO COSMELLI, MILTON INOSTROZA, GINA LUCI, ÉRIC TANTER, JORGE SOTO ANDRADE

ECOCAM, UN SISTEMA COMPUTACIONAL ADAPTABLE AL CONTEXTO PARA PROMOVER ESTRATEGIAS DE CÁLCULO MENTAL: UN DISEÑO Y ESTUDIO DE CASOS

ECOCAM, A CONTEXT SENSITIVE COMPUTATIONAL SYSTEM TO PROMOTE MENTAL CALCULATION STRATEGIES: A DESIGN AND CASE STUDY.

RESUMEN. Basado en nuestro trabajo previo sobre estrategias cognitivas para el cálculo mental, presentamos el diseño de un sistema computacional adaptable al contexto, denominado ECOCAM, que apunta a promover estrategias de cálculo mental alumnos de la enseñanza básica. Realizamos un primer testeo de nuestra propuesta a través de una implementación concreta de ECOCAM para promover una estrategia específica, a saber la de "trasvasije", frente a tareas de suma, mediante una experiencia piloto y estudio de casos, con niños principalmente de 4º año básico. Discutimos los hallazgos junto con su implicancia para futuros desarrollos e implementación de ECOCAM.
PALABRAS CLAVE: Cálculo mental, estrategias cognitivas, sistema computacional adaptable al contexto, metáforas, tiempo de respuesta.

ABSTRACT. Based on our previous work on cognitive strategies for mental calculation, we present a design of a Context Sensitive Computational System, called ECOCAM, aiming at promoting mental calculation strategies in primary school students. We carry out a first testing of our system through a concrete implementation of ECOCAM to promote a specific strategy, to wit the "transfer" strategy, for addition tasks, by means of a pilot study and some case studies, mainly with K-4 students. We discuss our findings and implications for further developments and implementations of ECOCAM.
KEYWORDS: Mental calculation, cognitive strategies, context sensitive computational system, metaphors, response time.

RESUMO. Com base em nossos trabalhos anteriores sobre estratégias cognitivas para o cálculo mental, nós apresentamos o projeto de um sistema de computador adaptável ao contexto, chamado ECOCAM, que visa promover estratégias de cálculo mental em estudantes da educação básica. Foi realizado um primeiro teste de nossa proposta através de uma aplicação concreta das ECOCAM para promover uma estratégia específica, nomeadamente a "transferência", para às tarefas que envolvem adição, através de estudos-piloto e caso, com estudantes, principalmente a partir do ano 4 base. Discutimos os achados, juntamente com suas implicações para o futuro desenvolvimento e implementação de ECOCAM.
PALAVRAS-CHAVE: Calculo Mental, estratégias cognitivas, sistema computador adaptável ao contexto, metáforas, tempo de resposta.

RÉSUMÉ. Sur la base de nos travaux antérieurs sur les stratégies cognitives pour le calcul mental, nous présentons une conception d'un Système Informatique Sensible au Contexte, appelé ECOCAM, visant à promouvoir des stratégies de calcul mental chez les élèves du primaire. Nous effectuons un premier test de notre système à travers une mise en œuvre concrète d'ECOCAM visant à promouvoir une stratégie spécifique, à savoir celle de "transfert", pour des tâches d'addition, au moyen d'une étude pilote et quelques études des cas, principalement aves des étudiants de 4e année de l'école primaire. Nous en discutons les résultats ainsi que les implications pour le développement futur et la mise en œuvre d'ECOCAM.
MOTS-CLÉS: Calcul mental, stratégies cognitives, système informatique sensible au contexte, métaphores.

1. INTRODUCCIÓN

La introducción de la aritmética en la escuela tuvo como uno de sus objetivos primordiales el que los estudiantes adquirieran una destreza en el cálculo, exacto y rápido, de las operaciones numéricas básicas que les sería útil en la vida adulta, particularmente en las actividades de compra y venta (Taton, 1953; Lethielleux, 2005). Para ello se enseñaba procedimientos estandarizados, aplicables a cualquier par de números (conocidos actualmente como "algoritmos convencionales" o "universales"), con el apoyo de diversos instrumentos, según la cultura de la sociedad en que estaba inserta la escuela, ábaco en algunas, papel y lápiz en otras (Brissiaud, 2003; Sun, 2008). La memorización de algunos resultados (por ejemplo, complementos a 10, sumas, productos) agilizaba este proceso de cálculo. Esta memorización de datos recibió originalmente el nombre de Cálculo Mental (CM) (Taton, 1953; Pochon, 1997; Lethielleux, 2005).

La evolución de los instrumentos de cálculo disponibles a nivel masivo en la población (calculadora de bolsillo, luego teléfono celular) y la evolución del debate social sobre la importancia de adquirir destreza en el cálculo aritmético en la formación matemática de los estudiantes de educación general básica, han puesto en evidencia que el CM tiene hoy un rol cognitivo y didáctico más relevante que su rol utilitario de antaño. Se habla así de "CM reflexivo" o "pensado" (Butlen y Pezard, 1992; Beishuizen, 1993; Parra, 1993; Pochon, 1997; Ortega & Ortiz, 2002; Brissiaud, 2003; Butlen, 2007; Williamson, 2008; Gálvez, 2009), sin desconocer sin embargo su componente "automatizada" (Lethiellieux, 2005; Anselmo, Evesque-Sagnard, Fenoy, Planchette & Zuchetta, 2008).

En esta concepción, el aprendizaje del CM aparece como subsidiario a la comprensión de las propiedades y relaciones entre los números y a la familiaridad del aprendiz con los diversos campos numéricos con los que opera durante su aprendizaje. Esta comprensión de los números y su operatoria se manifiesta notablemente en el repertorio de estrategias, tanto idiosincrásicas como aprendidas, que emplean los alumnos al abordar una tarea de CM (Houlihan & Ginsburg, 1981; Carpenter & Moser, 1982; Siegler & Shrager, 1984; Baroody, 1987; Siegler & Campbell, 1989; Siegler & Jenkins, 1989; Christensen & Cooper, 1991; Beishuizen, 1993; Kamii, Lewis & Livingston, 1993, Klein & Beishuizen, 1994; Reys, Reys, Nohda, & Emori, 1995; Braten, 1998; Kamii & Dominick, 1998; Shrager & Siegler, 1998; Askew, 1999; Heirdsfield, 2000; McIntosh & Dole, 2000; Postlewait, Adams & Shih, 2003; Ebbutt, Mosley & Skinner, 2005; Sun, 2008). Sufre sin embargo por otra parte los efectos dañinos del énfasis en los algoritmos únicos y estandarizados de CM (Kamii & Dominick, 1998; Heirdsfield, 2000).

En Chile, el espectro de estrategias observadas en (Gálvez, G., Cubillos, L., Cosmelli, D., Léger, P., Mena, A., Tanter, E., Flores, X., Luci, G., Montoya, S., y Soto Andrade, J., 2011) revela una ausencia casi total de representaciones concretas, visualizaciones icónicas o metáforas, incluso en el caso de niños que han sido previamente expuestos a éstas en su escuela.

Esto puede ser debido a que los docentes de la escuela básica habitualmente enseñan un procedimiento estándar único para cada operación, a seguir paso a paso para resolverla, aunque resulte a veces engorroso y susceptible a errores. Un ejemplo típico: para calcular 2000×35, la mayoría de los escolares en Chile multiplicará 5 por cada una de las cifras de 2000 y luego hará lo mismo con 3, para finalizar sumando ambos subproductos, en vez de ver el ejercicio como un todo y aplicar algunas propiedades que harían más breve y sencilla la operación, como por ejemplo: $2000 \times 35 = 2 \times 35 \times 1000 = 70 \times 1000 = 70000$. Por otra parte, cuando se llega a mostrar representaciones o metáforas en la escuela (como la de la recta numérica), son utilizadas en actividades anecdóticas o como simples ilustraciones de un algoritmo, en lugar de hacerlas jugar un rol propiamente enactivo[1] (Masciotra, Roth y Morel, 2007), incidente en el proceso cognitivo del alumno y en su construcción de conceptos. Se genera así una ruptura cognitiva y

[1] generador de conocimiento mediante la acción del sujeto en el mundo.

didáctica entre la experiencia previa concreta y un CM que aparece como un juego aritmético esotérico y disociado.

Surge entonces la necesidad de promover Estrategias de Cálculo Mental (ECMs) con el objetivo de proveer mecanismos sencillos pero equivalentes a los propuestos por los algoritmos convencionales. Con este fin, las ECMs utilizan de manera flexible y "oportunista" propiedades del sistema de numeración y de las operaciones aritméticas.

Con el fin de promover el desarrollo de estas ECMs, presentamos ECOCAM: un sistema computacional sensible al contexto que ayuda a los estudiantes a identificar y tomar conciencia de sus propias ECMs. Para lograr lo anterior, ECOCAM articula señales provenientes de dispositivos denominados sensores, con respuestas que genera para alcanzar cierto propósito definido previamente. En la presente versión de prueba se contempla que aplique una secuencia de 32 ejercicios organizados en cuatro categorías o tipos según su estructura y dificultad operatoria, como se describe en la sección 4 más adelante.

A continuación, recapitulamos nuestro marco teórico referente a las ECMs, su relación con las metáforas conceptuales y su rol en Chile (sección 2), recordamos qué son sistemas computacionales sensibles al contexto (sección 3), describimos nuestro sistema ECOCAM (sección 4), nuestras hipótesis de trabajo y metodología de investigación (sección 5), nuestra experiencia piloto y estudio de casos (sección 6), para terminar con una discusión de éstos y conclusiones (sección 7).

2. ESTRATEGIAS DE CM (ECMS)

2.1. Marco teórico de base: Las metáforas en nuestra cognición.

Nuestro marco teórico (Gálvez et al., 2011) se apoya en la hipótesis fundamental que nuestra actividad cognitiva opera en base a metáforas, desde lo más concreto a lo más abstracto (Johnson & Lakoff, 2003; Gallese & Lakoff, 2005; Radford & André, 2009). La propia matemática aparece así como una construcción de nuestra "mente corporizada", íntimamente ligada a nuestro funcionamiento sensoriomotor (Varela, Thomson & Rosch, 1991; Gallese & Lakoff, 2005), gracias a una permanente actividad metafórica, desde los niveles más elementales a los más sofisticados (Sfard, 1994, 1997; English, 1997; Presmeg, 1997; Lakoff & Núñez, 2000; Parzysz, Bergsten, Matos & Pesci, 2003). Las metáforas (conceptuales) tienen aquí un rol no sólo cognitivo sino que didáctico, fundamental, suministrando tanto medios de aprender y construir nuevos conceptos, como herramientas amigables para resolver eficazmente situaciones problemáticas complejas (Presmeg, 1997; Lakoff & Núñez, 2000; Soto-Andrade, 2006, 2007a, 2007b, 2008). Toma cuerpo así otra forma de enseñar y aprender matemáticas, si asumimos el hecho que conocemos moviéndonos e interactuando con el entorno inmediato (Varela et al., 1991; Gallese & Lakoff, 2005; Masciotra et al., 2007; Stewart, Gapenne & Di Paolo, 2010).

Suscribimos por ende a la concepción *multimodal* de la cognición y el pensamiento (Gallese & Lakoff, 2005; Radford & André, 2009), que sustenta la hipótesis que el uso y práctica de metáforas sensoriomotrices es relevante al aprender matemáticas (Radford & André, p. 244-266). Ahora bien, las metáforas (conceptuales) más impactantes y significativas para nuestros procesos cognitivos conllevan habitualmente un tránsito entre distintos modos de representación (Bruner, 1996) o registros (Duval, 1995). En la terminología de (Bruner, 1996) nuestra multimodalidad cognitiva queda descrita por tres *modos de representación: enactivo* (basado en la acción y la motricidad), i*cónico* (basado en imágenes) y *simbólico* (basado en símbolos y lenguajes), llamados también: *concrete, pictorial, abstract,* en el exitoso modelo didáctico de Singapur (Yeap, 2005).

Durante su desarrollo cognitivo el niño transita desde lo enactivo a lo simbólico, pasando por lo icónico, pero no es éste un progreso unidireccional: la resolución de diversos problemas se hace posible gracias a un tránsito "descendente" de lo simbólico a lo icónico o a lo enactivo, correspondiente a la activación de metáforas sensoriomotrices (Soto-Andrade, 2007a, 2007b, 2008). Esto se aplica especialmente a la práctica del CM y a la interacción de los niños con ECOCAM.

2.2. Metáforas y ECMs.

El CM aparece entonces como un dominio en el que el uso de metáforas como forma de "re-presentar" o de "imaginarse" un problema, deviene no solo explícito sino que necesario. Si al calcular mentalmente, no nos reducimos a visualizar la suma o resta algorítmica vertical, que se escribe naturalmente en papel, emergen naturalmente metáforas para la suma como juntar, añadir, llenar, avanzar, etc., cuya activación pone en juego capacidades sensoriomotrices relevantes para el CM.

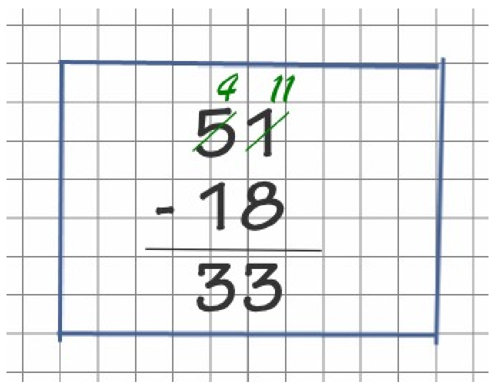

Figura 1. Representación de la resta entre los números 51 y 18. Es posible observar como el alumno al ver que no es posible realizar la resta entre 1 y 8, aplica la operación de reserva: le pide prestado un 1 al número 5 realizando una transformación de los operandos (en verde). Con lo anterior, el número 5 queda temporalmente como 4 y el número 1 queda temporalmente como 11.

Por ejemplo: para restar 51 – 18, podemos visualizar la operación algorítmica vertical (Figura 1) o podemos vernos yendo de la cuadra 18 a la 51 de una larga avenida, caminando primero hasta la cuadra 20, donde tomamos el bus expreso, que se detiene solo cada 10 cuadras, del que descendemos en la cuadra 50, para caminar una cuadra hasta nuestro destino. En total $2 + 30 + 1 = 30 + (2 + 1) = 30 + 3 = 33$. Vemos así cómo en lugar de la aplicación mecánica de un algoritmo memorizado (resta con reserva), el niño puede recurrir a una ECM, en forma de una "visualización numérica", ligada a una activación idiosincrásica de la *metáfora de la pista numérica*, bajo la forma "sumar es avanzar, restar es retroceder", o también "restar es recorrer lo que falta" (Lakoff & Núñez, 2000; Soto-Andrade, 2006, 2007a, 2007b, 2008). Esta posible activación depende sin embargo de la experiencia previa del niño, de su modo cognitivo predominante, de sus interacciones sociales, del contrato didáctico vigente en el aula, entre otros.

Como ejemplo de sustento experimental reciente, proveniente de la neurociencia cognitiva, de la postura teórica que enfatiza el rol de las metáforas sensoriomotrices en el aprendizaje de la matemática y la práctica del CM (Knops, Thirion, Hubbard, Michel & Dehaene , 2009).

Según nuestro marco teórico entonces, las ECMs emergen gracias a la activación de metáforas, usualmente sensoriomotrices y eventualmente inconscientes (Gálvez et al., 2011).

2.3. ECMs versus algoritmos universales.

Las ECMs son más que simples procedimientos y tienen la virtud de estar "situadas", en lo cognitivo. Son "oportunistas", en el sentido de ser adaptativas y depender de cómo vea el sujeto la situación específica involucrada en la tarea propuesta de CM, en particular la naturaleza de los números involucrados. Se contraponen así a los algoritmos convencionales, o universales, que son "burocráticos", en el sentido de tratar a todos los números por igual y aplicarse de manera independiente de la situación específica considerada.

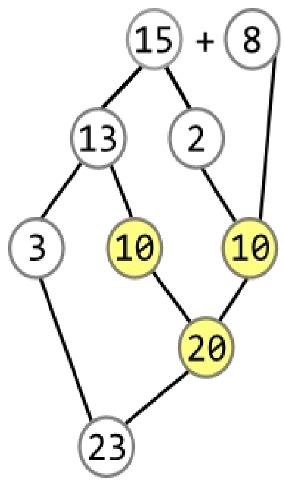

Figura 2. Representación icónico-simbólica en forma de árbol de la operación $15 + 8$. Se ha resaltado con color amarillo los nodos del árbol que representan decenas.

Notar que describimos aquí icónico-simbólicamente estas estrategias (Figura 2), lo cual es algo equívoco pues en realidad, en nuestros estudios de casos se las ve emerger en los alumnos mediante un lenguaje enactivo gestual que involucra su psicomotricidad. En lugar de recitar "descompongo aditivamente el 15 como $13 + 2$ y utilizo la propiedad asociativa de la suma", como preconizan algunos textos escolares en Chile, los niños dicen: "Paso 2 unidades del 15 al 8, para completar 10" visualizando más bien un *trasvasije de cantidades*, que se apoya en la metáfora "los números son cantidades de objetos" y "sumar es juntar".

Una de nuestras hipótesis es que la práctica de estas estrategias contribuye a desarrollar capacidades cognitivas superiores en los alumnos, cuyo alcance para su vida futura va mucho más allá de averiguar rápidamente cuánto vale $15 + 8$. Por ejemplo, la capacidad de visualizar, de guardar registros de memoria simultáneos, a los que se accede en seguida secuencialmente, etc.

No se trata por lo demás de establecer "la mejor estrategia" para cada situación, sino más bien de contemplar o "tener a la vista", como hacen los profesores japoneses en el método de estudio de clases (Isoda, Arcavi y Mena, 2008), una variedad de estrategias, propuestas por los propios alumnos, cada una con ventajas y desventajas. Cognitivamente, es como tener a la vista distintas facetas de un poliedro complejo. Esto no invalida el hecho, importante por supuesto, que los alumnos puedan tener preferencias afectivas por una u otra estrategia.

2.4. Las ECMs en Chile.

A comienzos de los 90 varias misiones de la Cooperación Francesa recomendaron al Ministerio de Educación chileno (MINEDUC) la promoción del CM, definido como "cálculo pensado" (Butlen & Pézard, 1992; Pochon, 1997; Brissiaud, 2003; Butlen, 2007), asociado a los contenidos específicos de los programas escolares.

Otro impulso importante al CM provino de la campaña "Numeracy" de comienzos del 2000 en Inglaterra (Brown, Millett, Bibby & Johnson, 2000; Brown, Askew, Millett & Rhodes, 2003) y de la visita a Chile de Michael Askew, importante promotor británico del CM (Askew, 1999, 2004; Askew, Ebbutt & Mosley, 2006). Notemos que actualmente los cálculos realizados mediante algoritmos sólo son enseñados a partir del quinto grado en el Reino Unido (Askew, 2004).

Las orientaciones francesas e inglesas fueron acogidas por el equipo de matemática del Programa de las 900 Escuelas de MINEDUC que apuntaba a la capacitación de los profesores del primer ciclo básico (primero a cuarto año). Se publicó material escrito con propuestas de actividades para las clases de matemática (Riveros, Gálvez, Navarro y Zanocco, 1996) así como traducciones de textos de apoyo para la enseñanza de estrategias de CM (Ebbuttet et al., 2005; Askew et al., 2006) y se organizó concursos de CM para alumnos de tercero y cuarto año a lo largo de todo el país. Posteriormente se incluyó el CM como área de interés destacado en los programas oficiales de estudio de primer ciclo reformulados en 2002 y aún vigentes.

Sin embargo, la evidencia de aula indica que el CM no es una práctica generalizada en las escuelas de nuestro país. La enseñanza habitual de hecho no solo no lo fomenta, sino que tiende a desincentivar en los niños la búsqueda de estrategias alternativas de abordaje a problemas y privilegia la reproducción memorística y generalista de procedimientos estandarizados para calcular, que ellos manejan en forma precaria, con gran riesgo de cometer errores o de olvidar pasos de la secuencia prescrita. De este modo, aunque hayan manipulado material concreto e icónico al aprender los números en la educación parvularia y en primer y segundo año básico, aparece una clara ruptura cognitiva entre esa manipulación concreta y el ulterior aprendizaje mecánico y simbólico de algoritmos. (Gálvez et al, 2011; Radford & André, 2009, p. 246).

2.5. Un ejemplo paradigmático de ECM

La estrategia de "trasvasije" es una ECM que consiste en asociar dos metáforas fundamentales:

1) Los números son cantidades de objetos o de substancias y
2) Sumar es juntar.

Imaginemos que tenemos dos grupos de bloques cúbicos dispuestos en forma de torres y deseamos saber cuántos bloques tenemos en total, sabiendo cuántos bloques constituyen cada torre. Podríamos juntar los bloques de ambas torres y luego contarlos o bien contar sucesivamente los bloques de una torre a partir de la cantidad de bloques de la otra. Pero también podemos "trasvasijar" algunos bloques de una torre a otra, antes de juntarlas. Esto claramente no cambia el número total de bloques pero puede producir una torre con un número de bloques muy fácil de manipular, una cantidad exacta de decenas, por ejemplo.
Concretamente, la estrategia de cálculo mental de "trasvasije" consiste en trasladar una porción del segundo sumando al primer sumando o viceversa, antes de efectuar la adición. Por ejemplo, los sumandos involucrados en la operación $29 + 7$ pueden ser convertidos por trasvasije de 1, en $30 + 6$, para poder sumarlos (juntarlos) más fácilmente y obtener el resultado final que es 36. La última adición es simple de resolver ya que el alumno no necesita utilizar la técnica tradicional del "acarreo" o reserva.

3. SISTEMAS ADAPTABLES AL CONTEXTO

Los sistemas computacionales están cada día más presentes en el quehacer humano. Debido a esto, es que se ha desarrollado sistemas computacionales llamados *Sistemas Sensibles al Contexto (SSCs)* (Abowd, 1999; Hirschfeld, Costanza & Nierstrasz, 2008), que adaptan su *comportamiento* de acuerdo al *contexto* que reconocen. Informalmente, se podría decir que además de cumplir con la tarea para la que fueron diseñados, estos sistemas observan el entorno donde se están ejecutando y cuando identifican cierto contexto en el entorno, cambian su funcionamiento. Por ejemplo, en (Cook, 2006), los autores crearon una casa inteligente para el cuidado de ancianos. Ésta era controlada por un SSC que cambiaba su conducta de acuerdo a las necesidades de los ancianos; por ejemplo, llamaba a una ambulancia,

a) Cuando un anciano estaba sin moverse durante mucho tiempo, o
b) Cuando el anciano cambiaba su rutina diaria.

Un sistema que permita implementar la adaptación al contexto debe realizar los siguientes pasos:

Obtener información del entorno: Los SSCs introducen sensores en el sistema computacional para registrar los eventos que suceden en el entorno o en el interior del mismo SSC. Estos registros de eventos representan la historia del entorno o del sistema mismo, expresada en una secuencia de eventos.

Analizar la información recibida: A medida que los eventos son registrados, los SSCs analizan estas secuencias de eventos registradas para inferir si algún contexto esta activo o no (por ejemplo, anciano sin moverse durante mucho tiempo). Reconocer un contexto no es una tarea sencilla, pues no todos los contextos siguen una secuencia prefijada y precisa de eventos (por ejemplo, cocinar).

Adaptar su conducta: Cuando un contexto es reconocido, el SSC debe adaptar su conducta (por ejemplo, llamar a una ambulancia). En ocasiones, el cambio de conducta no es una tarea sencilla, porque este cambio implica modificar transversalmente gran parte del sistema computacional.

Desafortunadamente, si queremos que un sistema permita la adaptación al contexto, este sistema debe ser modificado de manera ad hoc y transversal,

a) para registrar cada evento que sucede dentro/fuera del sistema y

b) para implementar la adaptación de la conducta (Figura 3a).

Estos dos puntos llevan al problema de habérselas con SCCs no escalables ni extensibles a otras adaptaciones o propósitos. Afortunadamente, en la ciencia de la computación, hay mecanismos tales como *tracematches* (Allan et al., 2005) y *OTM* (Leger & Tanter, 2010) que de manera modular (es decir, sin modificar transversalmente el sistema) registran y analizan secuencias de eventos, para luego adaptar el comportamiento de un programa si ocurre un patrón de eventos, que representa un contexto (ver Figura 3b). Sin embargo, solamente OTM es lo suficientemente expresivo para reconocer contextos complejos.

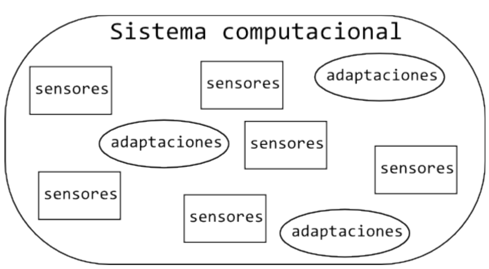

Figura 3a. Esquema de un SSCS

La Figura 3a. muestra cómo debe modificarse un sistema computacional para permitir implementar adaptaciones al contexto.

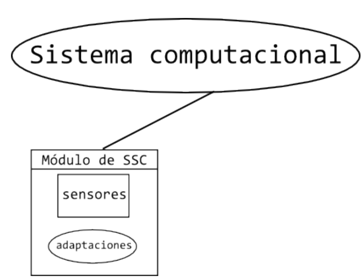

Figura 3b. Modularización de un SSC

La Figura 3b. muestra cómo se modularizan las modificaciones de un SCC usando mecanismos como tracematches y OTM.

4. ECOCAM

Como mencionamos anteriormente, creemos que en las aulas no se promueve realmente las ECMs, a pesar de la importancia de la diversidad de destrezas presentes en los alumnos, debido al énfasis reinante en la enseñanza de procedimientos estandarizados, únicos y universales (Heirdsfield, 2000; Fernández, 2005; Gálvez et al., 2011). Los actuales sistemas computacionales personalizados no constituyen tampoco una solución porque no pueden reconocer con precisión (como lo haría un profesor) la destreza del alumno que los está usando. Por estas dos razones, proponemos ECOCAM (Ecocam, 2010), un SSC que reconoce la destreza del alumno (contexto) y se adapta para promover ECMs, en este caso, ECM de trasvasije. Para permitir que ECOCAM pueda ser extendido para promover otras ECMs (Figura 4), desarrollamos ECOCAM usando el mecanismo OTM, mencionado anteriormente. En esta sección describimos los desafíos para desarrollar este SSC y mostramos un ejemplo de uso de este sistema.

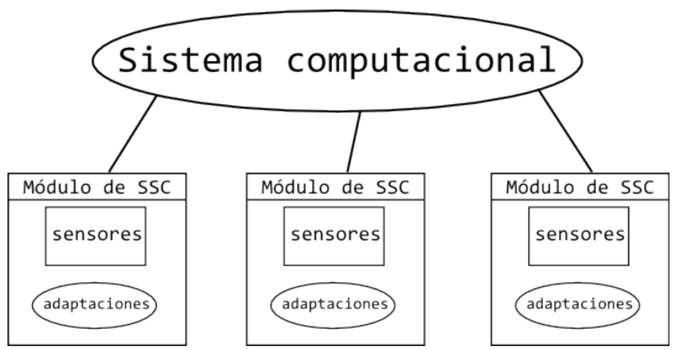

Figura 4. Un SCC que permite implementar múltiples ECMs.

Desafíos de ECOCAM:

Reconocer la destreza de un alumno implica reconocer el algoritmo o procedimiento usado por el alumno para resolver un ejercicio. Para un SSC, reconocer la destreza particular de un alumno conlleva los siguientes desafíos:

a) **Reconocer los pasos del procedimiento mental que un alumno usó para resolver un ejercicio**. Cuando un alumno resuelve un ejercicio mentalmente aplica una serie de pasos para lograr su objetivo. Averiguar los pasos que un alumno realizó es una tarea compleja, debido a que toda esta información se genera en su cerebro. A pesar de lo anterior, ECOCAM es capaz de reconocer la destreza del alumno registrando cada paso del procedimiento que éste realiza, de una manera no intrusiva (sin solicitarle información alguna).

b) **Asociar a una ECM el procedimiento empleado**. Si la destreza es representada por un procedimiento y un procedimiento es definido por una compleja secuencia de pasos, entonces el sistema computacional debe reconocer secuencias específicas de pasos. Asociar el procedimiento a una ECM, implica que el SSC debe usar un mecanismo como OTM para asociar estas complejas secuencias de eventos a ECMs.

Un tour por ECOCAM

ECOCAM ofrece una adaptación a dos niveles de granularidad. En el primer nivel, ECOCAM intercambia la *interfaz de usuario* dependiendo de las respuestas del alumno.

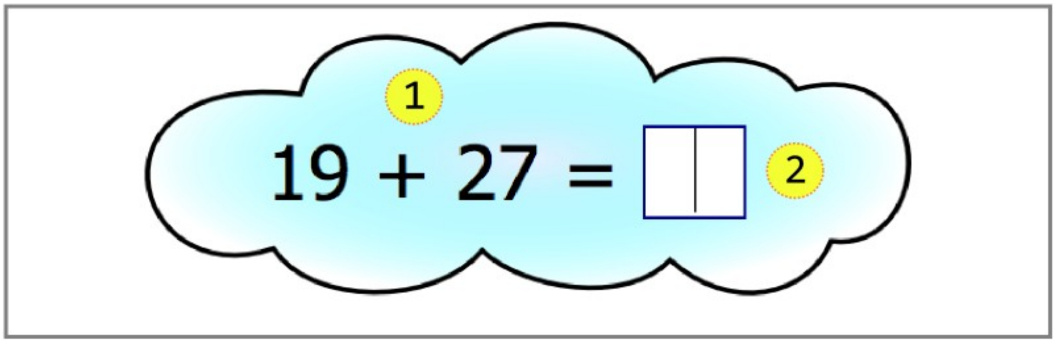

Figura 5. La interfaz de usuario simple de ECOCAM

La figura 5 muestra la interfaz de usuario simple de ECOCAM. La componente **1** muestra el *ejercicio*, 19 + 27 en este caso, y la componente **2** muestra un *cuadro de texto* que permite al alumno escribir el resultado. Si el alumno responde satisfactoriamente varios ejercicios, ECOCAM genera ejercicios como 18 + 23, que son más difíciles de resolver debido que no existe un operando terminado en 9 que sugiera como deducir rápidamente la respuesta. En cambio, si el alumno muestra un comportamiento erróneo reiteradas veces, ECOCAM detecta ese comportamiento y le ofrece una segunda interfaz de usuario, la cual es una interfaz gráfica extendida (Figura 6).

La figura 6 muestra la interfaz gráfica de usuario extendida de ECOCAM. Como se puede observar esta interfaz agrega dos nuevas componentes: La componente 3 consta de los soportes donde el número está representado de manera icónica. La componente 4 muestra el botón de vaciado que permite al alumno vaciar los dos soportes en uno común en el momento que tenga solamente decenas (rectángulos amarillos) en uno de los dos soportes. El objetivo de esta interfaz es permitir al alumno aplicar la ECM del "trasvasije" intercambiando unidades (cuadrados rojos) y quinquenas (rectángulos azules) entre los soportes. Es importante mencionar que cada soporte está compuesto por un número y su correspondiente representación icónica.

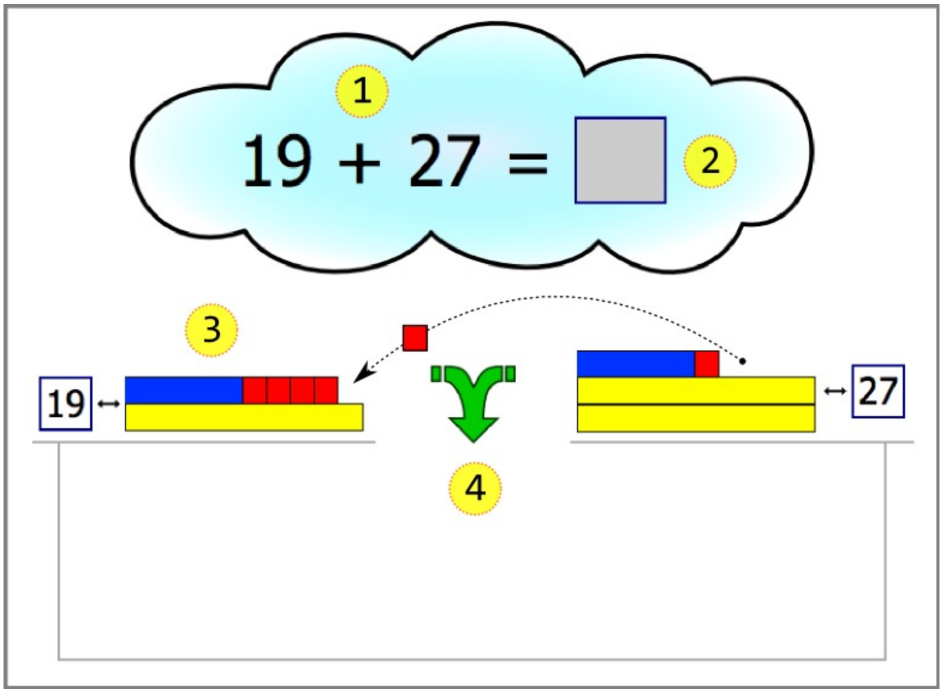

Figura 6. La interfaz gráfica de usuario extendida de ECOCAM. Como se puede observar la componente 2 en esta situación se encuentra deshabilitada. Las nuevas componentes 3 y 4 permiten al alumno interactuar con ECOCAM para poder resolver los ejercicios aplicando la ECM del "trasvasije".

El segundo nivel de granularidad de adaptación que ofrece ECOCAM, está relacionado con promover estrategias de CM. Por ejemplo, en la figura 6, se muestra al alumno trasladando un rectángulo rojo del segundo soporte hacia el primero con el objetivo de completar una decena. En la figura 7 se muestra lo que el alumno ve después de haber presionado el botón de vaciado. Para realizar esta transición de la figura 6 a la figura 7 el alumno ejecutó la siguiente secuencia de pasos:

a) arrastrar una unidad (cuadrado rojo) del segundo soporte al primero y

b) pulsar el botón de vaciado.

Esto significa que el alumno usó el algoritmo o procedimiento del *trasvasije* (Sección 2), que es óptimo porque ejecuta el mínimo número de movimientos para permitir pulsar el botón de vaciado. ECOCAM al identificar esta secuencia de pasos, crea ejercicios más complejos (por ejemplo, 68+23), donde el algoritmo óptimo es el trasvasije.

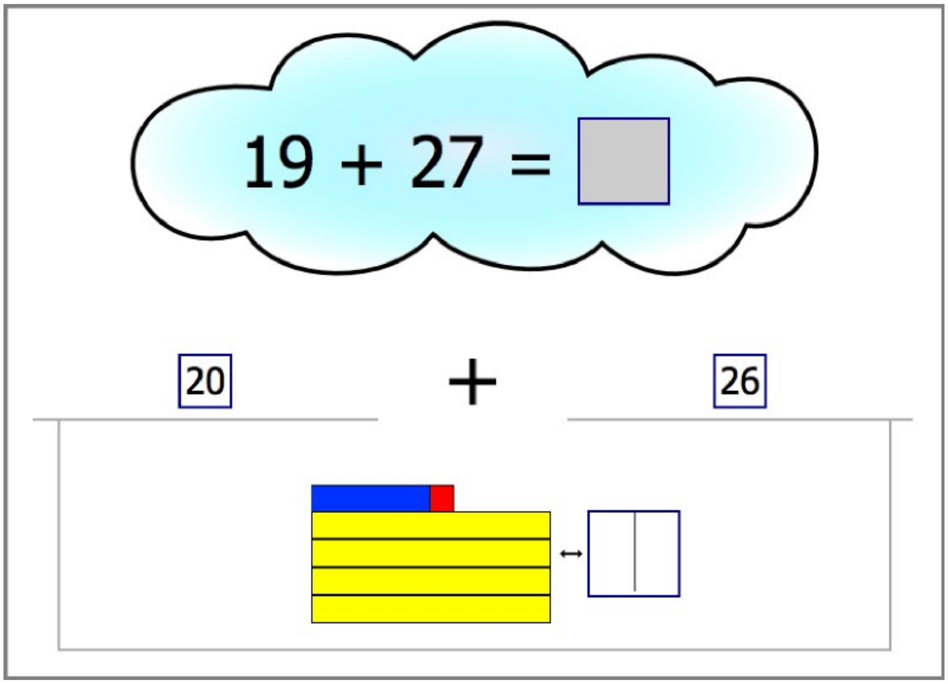

Figura 7. Interfaz Gráfica final en la cual el estudiante debe responder al ejercicio apoyándose en la representación icónica lograda luego de aplicar la ECM del "trasvasije".

Concretamente, ECOCAM ejercita con el alumno un conjunto de 32 ejercicios elegidos al azar desde http://www.pleger.cl/ecocam/experimento.doc, los cuales pueden ser clasificados en cuatros tipos:

Tipo 1: Se traslada una unidad (cuadrado rojo) para completar 10 donde hay 9.
Tipo 2: Se traslada dos unidades para completar 10 donde hay 8.
Tipo 3: Se traslada tres unidades para completar 10 donde hay 7.
Tipo 4: Se traslada una quinquena (rectángulo azul) de 5 unidades para completar 10 donde hay sólo 5.

ECOCAM presenta 8 ejercicios de cada tipo, desde el tipo 1 al 4. Dentro de cada tipo, reconoce, como explicado anteriormente, si el alumno está usando ECM de trasvasije.

5. Hipótesis de trabajo y metodología de investigación

El diseño de ECOCAM está motivado por un conjunto de hipótesis establecidas por nosotros. He aquí las más importantes:

1. Un trabajo previo de activación e incorporación de metáforas sensoriomotrices facilitaría tránsitos cognitivos en los alumnos, que redundarían en la emergencia de estrategias no convencionales y situadas que mejorarían su desempeño en CM.

2. En ausencia de un tal trabajo previo, para resolver tareas de CM los alumnos emplean un repertorio diverso de estrategias que incluye tanto estrategias convencionales, típicamente enseñadas en la escuela, como otras, no convencionales, eventualmente idiosincrásicas, aprendidas o desarrolladas por

ellos mismos. No todas estas estrategias son igualmente eficaces para resolver un ejercicio en particular. Creemos que mediante la interacción con un SSC como ECOCAM, que reconozca la destreza del alumno y se adapte a ella, es posible promover la ECM más apropiada al ejercicio abordado.

3. Los alumnos que no han sido expuestos demasiado tiempo a un algoritmo convencional o universal, son más propensos a aprender espontáneamente ECMs. Por esa razón, ECOCAM es probado con niños de primer ciclo básico.

4. La interfaz gráfica de ECOCAM nos permite capturar de manera no intrusiva el procedimiento que el alumno desarrolla para resolver un ejercicio. Además, la interfaz gráfica que invita a completar unidades mayores es apropiada para promover ECMs como la de trasvasije para tareas de adición.

Nuestra metodología de investigación integra principalmente los paradigmas interpretativo y sociocrítico en el sentido de (Godino, 1993). En efecto, desde una visión interpretacionista, intentamos entender los procesos cognitivos y didácticos subyacentes a las ECMs "oportunistas" y "situadas" de CM, que se desarrollan típicamente a partir de las capacidades psicomotrices básicas de los niños, vía metáforas y representaciones que involucran tránsitos cognitivos. Pero además, queremos promover ECMs específicas, como la del trasvasije, con ayuda de un esquema computacional sensible al contexto, que interactúa adaptativamente con el alumno, apuntando a su mejor desempeño en CM y en el desarrollo de capacidades cognitivas superiores relevantes en su vida ulterior.

6. Experiencia piloto y estudio de casos

6.1. ECOCAM: un software en estado de prueba y ajuste.

Como se ha explicado en párrafos anteriores, ECOCAM enfrenta a los estudiantes, a través del computador, a una secuencia de adiciones de dos sumandos que son resueltas mediante las estrategias que idiosincrásicamente cada estudiante posee. Cada ejercicio ocupa una pantalla que se mantiene en espera, cronometrando el tiempo de reacción, hasta que el estudiante escriba su respuesta. En caso de tener un comportamiento erróneo en ejercicios consecutivos, se activa a partir de ese momento, en la parte inferior de la pantalla, una representación visual de la operación planteada. Esta interfaz gráfica de apoyo gráfico, muestra mediante bloques de distinto tamaño y color, la representación de unidades, quinquenas y decenas de cada sumando y apela a la intuición visual del alumno para que reordene los bloques de una manera conveniente que permita un conteo de unidades y decenas más sencillo. Tal manipulación gráfica constituye, en sí misma, un recurso didáctico que sugiere visualmente una estrategia de cálculo, o "atajo", que permitiría alcanzar el resultado correcto de manera más sencilla y rápida.

El software está en etapa de construcción y los experimentos piloto realizados permiten ajustar su desempeño para cumplir su objetivo final: Ayudar a los estudiantes a descubrir y aplicar nuevas y más eficientes estrategias de CM, que basadas en las propiedades de los números involucrados les permitan mejorar su desempeño matemático, expresado tanto en la reducción del tiempo promedio de respuesta como en el incremento de la proporción de respuestas correctas.

6.2. Una primera experiencia piloto.

Para probar estas ideas se aplicó una versión de prueba del software a 17 alumnos de 4º año básico, de nueve y diez años. Cada uno se vio enfrentado a 32 adiciones de cuatro tipos diferentes. Esto generó un total de 544 respuestas de las cuales 433 fueron correctas (79,6%) y 111 incorrectas (20,4%). Cabe señalar que de las 544 respuestas obtenidas sólo en 13 de ellas (2,4%) se activó la interfaz gráfica y que en esos casos se obtuvo un 100% de respuestas correctas. De las 531 respuestas restantes, las que no contaron con interfaz gráfica, 420 fueron acertadas y 111 erróneas, es decir, un 79,1% de éxito.

Parece recomendable ajustar el momento en que se activa la interfaz gráfica, de modo de aumentar el tiempo de exposición del estudiante a ella, para acelerar el tránsito de la estrategia previa a la propuesta, que el software apunta a inducir.

En cuanto a la velocidad de respuesta, se obtuvo, como era de esperar, un tiempo bastante mayor (182,6 segundos) cuando los estudiantes respondieron apoyados por la interfaz gráfica que cuando respondieron sin dicho apoyo (21,4 segundos). Se espera que una vez descubierta la nueva estrategia dicho tiempo se reduzca de manera significativa.

La mayoría de los 17 niños de la muestra responden dibujando en el aire la visualización del algoritmo vertical de suma (como en la muestra estudiada en Gálvez et al., 2011), cuando se les pregunta cómo lo hicieron.

Se observa además una polarización entre "renuentes" (aprox. un 60%) y "conversos" (aprox. un 40%) frente a la interfaz gráfica. Los primeros se resisten al cambio de registro y prefieren sus estrategias aprendidas o idiosincrásicas, típicamente la visualización del algoritmo de suma vertical. Los segundos encuentran más amigable y entretenida la interfaz gráfica y se dan cuenta que les permite visualizar la transferencia de unidades de un sumando a otro.

Constatamos sin embargo que después de usar exitosamente la interfaz gráfica, la gran mayoría de los niños, al enfrentarse a una suma simbólicamente escrita, vuelven a la estrategia inicial de visualización del algoritmo vertical.

Esto sugiere, en la terminología de (Bruner, 1996), una desvinculación entre el trabajo en el registro icónico y el simbólico.

Algunos niños emplean metáforas monetarias para transitar de lo simbólico a lo icónico: los rectángulos amarillos son monedas de 10 pesos (o "valen" 10 pesos), los azules, de 5 pesos, y los rojos, de un peso.

6.3. Algunos estudios de casos.

Emilia (5 años, Kindergarten, promedio 6.7 sobre 7 en matemáticas):

No sabe como calcular $19 + 27$, por ejemplo, pero reconoce los números en la interfaz gráfica, manipula los bloques para completar, obtiene el resultado en forma icónica y es capaz de leerlo: «treinta y seis». No tiene gran dificultad para pasar de lo icónico a lo simbólico. En el otro sentido, se apoya en metáforas monetarias (manipula dinero con familiaridad en la vida cotidiana): ¿Cómo entero 27 pesos con monedas? ¡Con dos monedas de 10, una de 5 y dos de 2 pesos!

Amanda (7 años, 2º Básico, promedio 6.8 sobre 7 en matemáticas)

Calcula mentalmente $27 + 19$ sumando $7 + 9$, como $8 + 8 = 16$, "reservando" 1 y luego sumando $2 + 1 = 3$, más 1, igual 4, es decir: 46.

Cuando comete errores de cálculo y le aparece la interfaz gráfica, lo hace bien, con economía de movimientos.

Sin embargo, cuando usó la interfaz gráfica, al retornar a la interfaz simbólica, vuelve a su estrategia previa de visualizar el algoritmo vertical. No hace espontáneamente el vínculo entre la manipulación icónica y el cálculo de $27 + 19$. Si el experimentador le sugiere que trate de visualizar las manipulaciones que hizo recién, comienza a verlo y dice: "le quito uno al 27 para completar el 19".

Comienza a aburrirse de hacer los ejercicios mentalmente (con su método) sin interfaz grafica y pregunta cuando va a aparecer ésta.

Cuando se cansa de su gimnasia mental de visualizar el algoritmo vertical, comienza a tratar de hacer las sumas “al achunte”(es decir, “al bulto”), con éxito. Por ejemplo, para calcular 27 + 38, dice que es como 50, porque 20 + 30 son 50, pero debe ser más, o sea 65 porque es “el que sigue” (explicación algo confusa). Dice que le cuesta explicar realmente como lo hizo. Aparentemente su estrategia es la de ensamblar piezas de un puzzle, posiblemente estimulada por la manipulación de los iconos de la interfaz gráfica. Para ella, es “achunte”, no es el algoritmo aprendido en la escuela.

Miranda (9 años, 4º básico, promedio 6.5 sobre 7 en matemáticas).

Usa espontáneamente una estrategia idiosincrásica de doble redondeo compensado:

Para calcular 44 + 29, por ejemplo, dice: “40 + 30 = 70, más 4 es 74, menos 1 es 73”.

Se observa que después de haber usado la interfaz gráfica vuelve a su estrategia propia al ejercicio siguiente.

Sin embargo aprecia la manipulación icónica de la interfaz gráfica y la prefiere a la suya, según expresa.

Logra visualizar trasvasije de uno, pero no toda la interfaz gráfica con la manipulación de bloques de 5 unidades.

Cuando los números son del tipo 26 + 15, donde su estrategia idiosincrásica es menos cómoda, eventualmente visualiza el algoritmo vertical, o bien dice que deja el 6 “a un lado” y calcula 20 + 15 = 35 y luego “trae de vuelta” el 6. Algunas veces, para calcular, por ejemplo, en un paso intermedio, 40 + 46, en lugar de decir rápidamente 86, gracias a la estrategia anterior, dice: “40 + 50 = 90, menos 4 igual a 86”.

Cuando se le sugiere que podría visualizar cuadrados para calcular una suma escrita simbólicamente, comienza a tratar de pasar mentalmente unidades de un sumando para otro, en 37 + 24 por ejemplo. Al comienzo las pasa de a una, obteniendo: 38 + 23, 39 + 22, 40 + 21, que calcula como (40+20) + 1 = 60 + 1 = 61; pero luego dice: “mejor de a tres, más fácil: 37 + 24 = 40 + 21, etc.”

No visualiza espontáneamente los números escritos en forma decimal como reuniones de rectángulos amarillos, rectángulos azules y cuadrado rojos, después de haber empleado la interfaz gráfica. Al serle sugerido, logra hacerlo, pero tiene dificultades para pasar bloques azules de un lado a otro, para formar bloques amarillos.

Contrariamente a Oscar, del mismo nivel etáreo y escolar (ver más abajo), en Miranda no prima el registro decimal sobre el icónico. Cuando pasa al icónico en la interfaz gráfica, se zambulle totalmente en él y "olvida" el decimal. Si se lo sugiere, sin embargo, logra mantener activo el registro decimal, y dice "al 38 le paso 2 cuadrados”, al hacer el arrastre de dos unidades. Más adelante rescata que para calcular 38 + 27, se puede pasar dos cuadrados rojos de derecha a izquierda. Para obtener 40 + 25, "deja de lado” el 5, por un momento, para sumar 40 y 20 primero, otras veces, lo hace como (40 + 30) - 5.

Pareciera elegir a veces la manera más complicada de proceder, pero lo hace siguiendo estrategias propias y variadas, en lugar de aplicar una sola regla eficaz.

Espontáneamente dice que visualizar mentalmente el método de las figuritas es muy largo y retiene solamente las “completaciones” de 38 a 40 o los “descensos” de 41 a 40, por ejemplo.

En su caso, tiene una estrategia propia de doble redondeo y compensación, que maneja con bastante éxito, llevando dos registros de memoria paralelos. Parece ser que la interfaz gráfica no le facilita directamente la estrategia de trasvasije, debido a la necesidad de trasladar bloques azules en ambos sentidos.

Oscar (10 años, 4° básico, promedio 6,7 en matemáticas):

Ocupa como estrategia general el completar el sumando más cercano a un número entero de decenas “para que quede exacto”, quitándole al otro. Se trata de una estrategia aprendida en la escuela. No necesitó interfaz gráfica, porque no cometió nunca tres errores seguidos.

Cuándo tuvo la oportunidad de practicar con la interfaz gráfica, en voz alta decía el número que estaba manipulando: “al 38 le añado 2”, etc. Esto sugiere que estaba funcionando en ambos registros a la vez, el icónico y el simbólico, cosa poco habitual.

Declara preferir la interfaz gráfica. Dice: ¡Así es más fácil!

7. Discusión y Conclusiones

En nuestras experiencias piloto y estudio de casos, hemos constatado que ECOCAM es amigable y cercano para los niños. Incluso una niña de Kindergarten, que no sabe qué hacer con adiciones de sumandos con dos dígitos en el registro simbólico, logra realizar icónicamente la adición y luego “traducir” diligentemente al registro simbólico.

Por otra parte, los niños (de 2º y 4º básico), que logran hacer las adiciones simbólicamente, algunos usando estrategias idiosincrásicas, aprecian la interfaz gráfica de ECOCAM, la hallan más entretenida y “más fácil”. Algunos preguntan incluso “cuando van a aparecer los monitos”. Una niña de 2º básico, cuando escuchó que la interfaz gráfica aparecía sólo si uno se equivoca, comenzó a equivocarse deliberadamente para forzar su aparición. En la experiencia piloto sin embargo notamos una polarización de la muestra entre “renuentes” (60%) y “conversos” (40%) al “cálculo icónico.”

Observamos además un efecto de desvinculación, no previsto, pues si bien hay niños que permanecen en el registro simbólico aunque manipulen icónicamente, la gran mayoría se sumerge completamente en el registro icónico al manipular los bloques de la interfaz gráfica de ECOCAM. Se puede observar que incluso adultos entrenados requieren un cierto esfuerzo cognitivo para mantener un pie en el registro simbólico (numérico decimal en este caso) mientras se manipula icónicamente para completar bloques amarillos y azules.

La manipulación de bloques azules de 5 unidades (quinquenas) es amigable en la manipulación icónica, pero no tanto en la visualización puramente mental.

La Figura 8b sugiere modificar la interfaz gráfica de modo que facilite de una forma más directa la estrategia de trasvasije, además de desarrollar una versión ulterior de ECOCAM que ayude al alumno a mantener contacto con lo simbólico al pasar a lo icónico, además de transitar fluidamente entre ambos registros.

Notamos al pasar que hay un contrato didáctico tácito que induce a muchos niños a usar el “oficial” algoritmo vertical para la suma, porque las otras estrategias, como compensación o trasvasije “no valen”.

Ulterior investigación sería necesaria para dilucidar eventuales efectos implícitos de la interfaz gráfica sobre las estrategias de los niños (como el caso de la estrategia de “achunte” de Amanda, más arriba). Asimismo, para detectar en qué momento el niño incorpora realmente la estrategia de trasvasije, para utilizarla en adiciones propuestas simbólicamente.

Además, sería interesante emprender una experimentación masiva para estudiar el comportamiento de tiempos de respuesta y porcentaje de errores de los niños luego de exposición pronta a la interfaz gráfica.

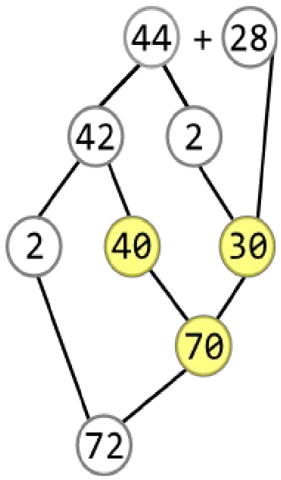

Figura 8a. Resultado de resolver la operación 44 + 28 utilizando la estrategia de cálculo mental del trasvasije.

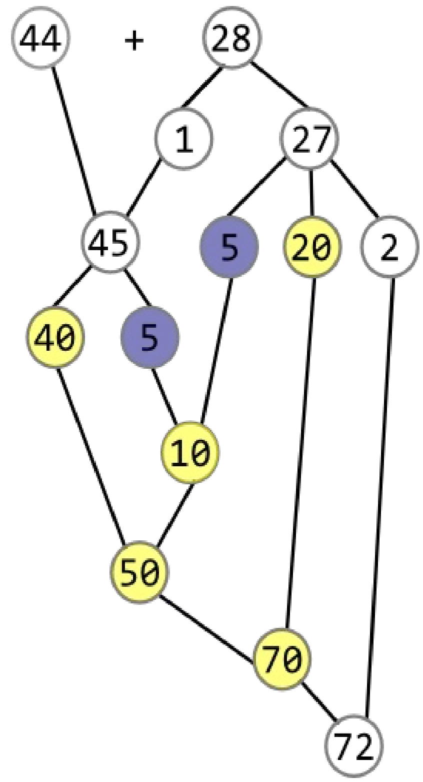

Figura 8b. Resultado de resolver la operación 44 + 28 utilizando la interfaz gráfica. Es importante observar cómo la interfaz gráfica induce al alumno a utilizar la descomposición por quinquenas (nodos de color azul).

AGRADECIMIENTOS

Este proyecto de investigación ha sido subvencionado por el Centro de Investigación Avanzada en Educación (proyecto PBCT CIE-05, año 2010).

Agradecemos a los colegios Santa Rita de Casia y CEMLAP por las facilidades y apoyo logístico otorgados para la aplicación de nuestro prototipo ECOCAM, así como a la Dra. María Leonor Varas por sus pertinentes observaciones y sugerencias a la primera versión de este trabajo.

Referencias Bibliográficas

Abowd, G. (1999). Classroom 2000: An experiment with the instrumentation of a living educational environment. IBM Systems Journal, 38(4), 508–530.

Allan, C., Avgustinov, P., Christensen, A., Hendren, L., Kuzins,S., Lhok, O., Moor, O., Sereni, G., Sittampalam G., & Tibble, J. (2005). Adding trace matching with free variables to AspectJ. In Proceedings of the 20th ACM SIGPLAN Conference on Object-Oriented Programming Systems, Languages and Applications (OOPSLA 2005), pp. 345–364, San Diego, California, USA, October 2005. ACM Press. ACM SIGPLAN Notices, 40(11).

Anselmo, B,.Evesque-Sagnard, S., Fenoy, K., Planchette, P., & Zuchetta, H. (2008), Calcul mental au collège: Nostalgie ou innovation? Lyon: IREM de Lyon.

Askew, M. (1999). Mental methods of computation, in A. Pinel, (Ed.), *Teaching, Learning and Primary Mathematics.* Derby: Association of Teachers of Mathematics.

Askew, M. (2004). El CM, piedra angular del aprendizaje matemático inicial (entrevista). *Revista de Educación, Ministerio de Educación de Chile, 310-311*, 23-25.

Askew, M., Ebbutt, S., & Mosley, F. (2006). *Enseñanza de Estrategias de CM*. 3° y 4° de Enseñanza Básica. Santiago de Chile: Galileo Libros.

Baroody, A. J. (1987). The development of counting strategies for single-digit addition. *Journal for Research in Mathematics Education, 18*(2), 141-157.

Beishuizen, M. (1993). Mental Strategies and Materials or Models for Addition and Subtraction up to 100 in Dutch Second Grades. *Journal for Research in Mathematics Education*, *24*(4), 294-323.

Braten, I. (1998). Cognitive strategies in mathematics, Part I: On children's strategies for solving simple addition problems, *Scandinavian Journal of Educational Research, 42*(1), 5-24.

Brissiaud, R. (2003). *Comment les enfants apprennent à calculer*. Paris: Retz.

Brown, M., Millett, A., Bibby T. & Johnson, D. C. (2000). Turning Our Attention from the What to the How: The National Numeracy Strategy. *British Educational Research Journal*, *26*(4), 457-471.

Brown, M., Askew, M., Millett, A. & Rhodes, V. (2003). The Key Role of Educational Research in the Development and Evaluation of the National Numeracy Strategy. *British Educational Research Journal*, *29*(5), 655-672.

Bruner, J. (1996). *The Culture of Education*, Cambridge: Harvard University Press.

Blessing, S. & Anderson, J. R. (1996). How people learn to skip steps. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition 22*(3), 576-598.

Brizuela, B. & Schliemann, A. (2004). Ten-year-old students solving linear equations. *For the Learning of Mathematics 24*(2), 33-40.

Butlen, D., Pezard, M. (1992). Calcul mental et résolution de problèmes multiplicatifs, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, *12*(2/3), 319-368.

Butlen, D. (2007). *Le calcul mental entre sens et technique: Recherches sur l'enseignement des mathématiques aux élèves en difficulté, du calcul mental à la résolution des problèmes numériques*. Besançon: Presses de l'Université du Franche-Comté.

Carpenter, T. P., & Moser, J. M. (1982). The development of addition and subtraction problem-solving skills. In T. P. Carpenter, J. M. Moser, & T. A. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Christensen, C. A., & Cooper, T. J. (1991). Children's solution strategies to single-digit addition problems: Some Australian data. *Educational Research and Perspectives 18*(2), 62-70.

Cook, D. (2006). Health Monitoring and Assistance to Support Aging in Place. *Journal of Universal Knowledge Management, 12*(1), 15-29.

Duval R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine*. Bern: Peter Lang.

Ebbutt,S., Mosley,F. & Skinner,C. (2005). Enseñanza de Estrategias de CM 1º y 2º Enseñanza Básica, Santiago de Chile: Galileo Libros.

Ecocam (2010). www.pleger.cl/research/ecocam2

English, L. (ed.): 1997, *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors, and images,* London: Lawrence Erlbaum

Espinoza, L., Barbé, J. y Gálvez, G. (2009). Estudio de fenómenos didácticos vinculados a la enseñanza de la aritmética en la educación básica chilena, *Enseñanza de las Ciencias*, *27*(2), 157–168.

Fernández, A.(2005). Avatares y estereotipos sobre la enseñanza de los algoritmos en matemáticas. *Revista de Iberoamericana de Educación Matemática, 4*, 31-46.

Gallese, V. & Lakoff, G. (2005). The brain's concepts: the role of the sensory-motor system in conceptual knowledge. *Cognitive Neuropsychology 22*(3/4), 455-479.

Gálvez, G. (2009). *CM: pensado, reflexionado, simplificado*. Santiago de Chile: Fundación Arauco.

Gálvez, G., Cubillos, L., Cosmelli, D., Léger, P., Mena, A., Tanter, E., Flores, X., Luci, G., Montoya, S., y Soto Andrade, J. (2011), Estrategias cognitivas para el Cálculo Mental, *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa 14*(1), 9-40.

Godino, J. D. (1993). Paradigmas, problemas y metodologías en didáctica de la matemática. *Quadrante*, *2*(1), pp. 9-22

Heirdsfield, A. (2000), Mental computation: Is it more than mental architecture? Presented at the Annual Meeting of the Australian Association for Research in Education, Sydney, 4 - 7 December 2000, retrieved January 15, 2010, from http://www.aare.edu.au/00pap/hei00259.htm

Hirschfeld, R., Constanza, P. & Nierstrasz, O. (2008). Context-Oriented Programming. *Journal of Object Technology*, *7*, 125–151.

Houlihan, D. M., & Ginsburg, H. P. (1981). The addition methods of first and second-grade children. *Journal for Research in Mathematics Education, 12*, 95-106.

Isoda, M.; Arcavi, A. y Mena, A. (Eds).(2008). *El Estudio de Clases japonés en Matemáticas*. Valparaíso: Ediciones Universitarias de Valparaíso (Segunda Edición).

Johnson, M. & Lakoff, G. (2003). *Metaphors we live by*. New York: The University of Chicago Press.

Kamii, C., Lewis, B. A., & Livingston, S. J. (1993). Primary arithmetic: Children inventing their own procedures. *Arithmetic Teacher*, *41*(4), 200-203.

Kamii, C., & Dominick, A. (1998). The harmful effects of algorithms in grades 1-4. In L.J. Morrow, & M. J. Kenney (Eds.), *The teaching and learning of algorithms in school mathematics, 1998 yearbook.* (pp. 130-140). Reston, VA: NCTM.

Klein, T., & Beishuizen, M. (1994). Assessment of flexibility in mental arithmetic. In J.E.H. Van Luit (Ed.), *Research on learning and instruction of mathematics in kindergarten and primary schools.* (pp. 125-152). Doetinchem, The Netherlands: Graviatt Publishing Company.

Knops, A., Thirion, B., Hubbard, E., Michel, V., & Dehaene, S. (2009). Recruitment of an area involved in eye movements during mental arithmetic. *Science 1*, *324*(5934), 1583-1585. doi: 10.1126/science.1171599

Lakoff, G., & Núñez, R. (2000). *Where Mathematics comes from*. New York: Basic Books.

Leger, P., &Tanter, E. (2010). An open trace-based mechanism. In J. Aldrich & R. Massa (Eds.). Proceedings of SBLP 2010: 14th Brazilian Symposium on Programming Languages. Salvador de Bahia, Brazil.

Lethielleux, C. (2005), Le calcul mental au cycle des apprentissages fondamentaux, Vol. 1, Paris: Bordas/Séjer

Masciotra, D., Roth, W. M., & Morel, D. (2007). *Enaction: toward a Zen mind in learning and teaching*, Twente, The Netherlands: Sense Publishers.

McIntosh, A., & Dole, S. (2000). Mental computation, number sense and general mathematics ability - are they linked? In J. Bana & A. Chapman (Eds.), Mathematics education beyond 2000, Proceedings of the 23rd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia (pp. 401-408). Sydney: MERGA.

Ortega, T. y Ortiz, M. (2002). Diseño de una intervención para la enseñanza-aprendizaje del CM en el aula. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *5*(3), 271-291.

Parra, C. (1993). CM en la escuela primaria. En C. Parra e I. Sáiz (Eds.), *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones*. (pp. 219-272). Buenos Aires: Paidós.

Parzysz, B., Bergsten, C**.,** Matos, J. M. & Pesci A. (2003). Introduction to Thematic Working Group 1, Role of metaphors and images in learning and teaching mathematics, *Proc. CERME 3,* descargado el 18 Septiembre 2010 de http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings/Groups/TG1/TG1_introduction_cerme3.pdf

Pochon, L-O. (1997). Regard sur le calcul mental. *Math Ecol, 36*(179), 19-27.

Postlewait, K. B., Adams, M. R., & Shih, J. C. (2003). Promoting meaningful mastery of addition and subtraction. *Teaching Children Mathematics, 9*(6), 354-357.

Presmeg, N. C.(1997). Reasoning with metaphors and metonymies in mathematics learning, in L. English (Ed.), *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors, and images,* (pp. 267-279). London: Lawrence Erlbaum Associates.

Radford, R., y André, M. (2009). Cerebro, cognición y matemáticas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 12*(2), 215-250.

Reys, R. E., Reys, B. J., Nohda, N., & Emori, H. (1995). Mental computation performance and strategy use of Japanese students in grades 2, 4, 6, and 8, *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(4), 304-326.

Riveros, M., Gálvez, G., Navarro, S. y Zanocco, P. (1996). *Tilín-Tilón. Actividades para el desarrollo de la capacidad de calcular.* Programa de las 900 Escuelas, Santiago, Chile: MINEDUC.

Sfard, A. (1994). Reification as the birth of metaphor, *For the Learning of Mathematics, 141*, 44-54.

Sfard, A. (1997). Commentary: On metaphorical roots of conceptual growth. In L. English (Ed.), *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors, and images* (pp. 339-371). London: Lawrence Erlbaum Associates.

Siegler, R. S., & Campbell, J. (1989). Individual differences in children's strategy choices. In P. L. Ackerman, R. J. Sternberg, & R. Glaser (Eds.), (pp. 218-254). *Learning and individual differences: Advances in theory and research*. New York: Freeman.

Shrager, J., &Siegler, R. S. (1998), SCADS: A model of children's strategy choices and strategy discoveries. *Psychological Science, 9*, 405-410

Siegler, R. S., & Shrager, J. (1984). Strategy choices in addition and subtraction: How do children know what to do? In C. Sophian (Ed.), *The origins of cognitive skills* (pp. 229-293). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Siegler, R. S., & Jenkins, E. (1989). *How children discover new strategies*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Soto-Andrade, J. (2006). Un monde dans un grain de sable: Métaphores et analogies dans l'apprentissage des mathématiques, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 11*, 123-147.

Soto-Andrade, J. (2007a). Metaphors and cognitive styles in the teaching-learning of mathematics. In D. Pitta-Pantazi, & J. Philippou (Eds.). *Proceedings CERME 5* (pp. 191-200). Retrieved 8.3.2008, from http://ermeweb.free.fr/CERME5b/

Soto-Andrade, J. (2007b), La cognición hecha cuerpo florece en metáforas…, en A. Ibañez, y D. Cosmelli, (Eds.), *Nuevos Enfoques de la Cognición : Redescubriendo la dinámica de la acción, la intención y la intersubjetividad* (pp. 71-90). Santiago, Chile: Universidad Diego Portales.

Soto-Andrade, J. (2008). Mathematics as the art of seeing the invisible…, in *ICME (International Congress in MathematicsEducation)11*, descargado el 8 de Marzo 2008 de http://tsg.icme11.org/document/ get/771

Stewart, J. R., Gapenne, O., Di Paolo, E. A. (2010), *Enaction: Towards a New Paradigm for Cognitive Science*, Cambridge, MA: MIT Press.

Sun, H. (2008). Chinese Young Children's Strategies on Basic Addition Facts, Proceedings of the 31st Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia. M. Goos, R. Brown, & K. Makar (Eds.), Sydney: MERGA.

Taton, R. (1953), *Le calcul mental,* Coll. Que sais-je, Nº 605, Paris: P.U.F.

Varela, F. J., Thomson, E., & Rosch, E. (1991). *The Embodied Mind: Cognitive Science and Human Experience.* Cambridge, MA: MIT Press.

Yeap, B. H. (2005). Helping every student to develop the ability in mathematical problem solving: The Singapore experience. In S. Chaiyasang, P. Wongyai & R. Janjaruporn, (Eds.). *The Proceedings of Symposium on Mathematics Education: Mathematical Problem Solving* (pp. 3-12). Bangkok: Srinakharinwirot University.

Williamson, V. (2008). Mental Maths – Passive to Active, *ERIC (Educational Resources Information Center)*, article EJ768897, descargado el 4 de Agosto 2008 de www.eric.ed.gov/ERICWebPortal/recordDetail?accno=EJ768897

Autores:

Paul Leger[1], pleger@dcc.uchile.cl
Grecia Gálvez[6], grecia.galvez@gmail.com
Lino Cubillos[2,4], lcubillo@uchile.cl
Diego Cosmelli[5], dcosmelli@puc.cl
Milton Inostroza[1], minostro@dcc.uchile.cl
Gina Luci[7], ginalucia2@yahoo.es
Éric Tanter[1,2], etanter@dcc.uchile.cl
Jorge Soto-Andrade[2,3], sotoandrade@u.uchile.cl

(1) Departamento de Ciencias de la Computación, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile.

(2) Centro de Investigación Avanzada en Educación, Universidad de Chile – Pontificia Universidad Católica de Valparaíso – Universidad de Concepción.

(3) Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad de Chile.

(4) Departamento de Estudios Pedagógicos, Facultad de Filosofía y Humanidades, Universidad de Chile.

(5) Escuela de Psicología, Pontificia Universidad Católica de Chile.

(6) Centro Félix Klein, Universidad de Santiago de Chile.

(7) AutoMind S.A., Santiago, Chile.