Funciones Generatrices

Gonzalo Navarro

La función generatriz es una transformación que permite condensar todos los valores de una secuencia $\{a_0, a_1, ..., a_n, ...\}$ en una única función

$$a(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n \tag{1}$$

y dado $a(z)$, escribimos su a_n correspondiente como $a_n = [z^n]a(z)$.

Esta transformación permite convertir ecuaciones de recurrencia en ecuaciones acerca de la función $a(z)$, que pueden ser más fáciles de resolver que la recurrencia original. Una vez obtenido el resultado, se debe antitransformar la función para recuperar los valores originales a_n. No lo veremos en el curso, pero también es sumamente útil para contar estructuras combinatorias, problema que aparece frecuentemente en el análisis de algoritmos (ej. cuántos árboles binarios de altura h hay?). En el curso nos concentraremos en su uso para resolver recurrencias.

En la Tabla 1 se presentan las funciones generatrices asociadas a varias secuencias conocidas (la tabla es útil en ambas direcciones). Pueden verificarse, algunas fácilmente y otras no tanto, reemplazando a_n por la secuencia en (1). Por ejemplo, para verificar la primera ($a_n = 1$), escribimos

$$a(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n = \sum_{n \geq 0} z^n = \frac{1}{1-z}$$

Esta forma no es la más cómoda para transformar la secuencia. Por ejemplo, supongamos que sabemos que la función generatriz para a_n es $a(z)$. Cuál es la función generatriz para a_{n-1}? Esta será

$$\sum_{n \geq 0} a_{n-1} z^n = z \sum_{n \geq 0} a_{n-1} z^{n-1} = z a(z)$$

donde hemos supuesto que la nueva secuencia valdrá cero en la primera componente.

Hay una serie de herramientas que nos permiten modificar una secuencia cuya función generatriz es conocida, y obtener inmediatamente la función generatriz de la secuencia modificada. En la Tabla 2 se muestran las transformaciones más importantes. Por ejemplo, podemos usar la última para derivar la función generatriz de

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

mediante suponer que los a_k multiplican a b_{n-k}, donde todos los $b_n = 1$. De este modo sabemos que $c(z) = a(z)b(z)$, donde $b(z)$ se puede obtener de la Tabla 1, de modo que

$$c(z) = \frac{a(z)}{1-z}$$

Es un buen ejercicio derivar algunas identidades de la Tabla 1 usando estas transformaciones sobre otras. Las líneas 2,3,4,6 y 9 son redundantes.

Secuencia	Función generatriz
$0, 0, 0, ..., 0, 1, 0, 0, ...$ $([n = k])$	z^k
$1, 1, 1, 1, ...$	$\frac{1}{1-z}$
$1, c, c^2, c^3, ...$	$\frac{1}{1-cz}$
$0, 1, 2, 3, ...$	$\frac{z}{(1-z)^2}$
$0, 0, 0, ..., 1, N+1, ..., \binom{n}{N}, ...$	$\frac{z^N}{(1-z)^{N+1}}$
$1, N, \binom{N}{2}, ..., \binom{N}{n}, ..., 1$	$(1+z)^N$
$1, N+1, \binom{N+2}{2}, \binom{N+3}{3}, ...$	$\frac{1}{(1-z)^{N+1}}$
$1, 1, 1/2!, 1/3!, ...$	e^z
$0, 1, 1/2, 1/3, ...$	$\ln \frac{1}{1-z}$
$0, 1, 1+1/2, ..., H_n, ...$	$\frac{1}{1-z} \ln \frac{1}{1-z}$

Table 1: Varias de las funciones generatrices que más aparecen en la práctica.

Secuencia	Función generatriz
$c_n = K a_n$	$c(z) = K a(z)$
$c_n = a_n + b_n$	$c(z) = a(z) + b(z)$
$c_n = a_{n-1}$ $(c_0 = 0)$	$c(z) = z a(z)$
$c_n = a_{n+1}$	$c(z) = \frac{a(z) - a_0}{z}$
$c_n = n a_n$	$c(z) = z a'(z)$
$c_n = a_n / n$ $(c_0 = 0)$	$c(z) = \int \frac{a(z)-a_0}{z} dz$
$c_n = K^n a_n$	$c(z) = a(Kz)$
$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$	$c(z) = a(z) b(z)$

Table 2: Transformaciones de secuencias y función generatriz asociada.

Veamos un ejemplo de transformar una recurrencia en función generatriz. Los números de fibonacci cumplen la propiedad

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \qquad , \qquad F(0) = F(1) = 1$$

aun no podemos aplicar fuciones generatrices porque la ecuación no es válida para todo n, por ejemplo no está definida para 0 y 1. Lo que haremos será reexpresarla como

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \qquad , \qquad F(0) = 0, F(1) = 1$$

ahora tomamos función generatriz de ambos lados

$$\frac{\frac{F(z)-F_0}{z} - F_1}{z} = \frac{F(z) - F_0}{z} + F(z)$$

multiplicando por z^2 de ambos lados tenemos

$$F(z) - z = zF(z) + z^2 F(z)$$

es decir

$$F(z)(1 - z - z^2) = z \qquad \Longrightarrow F(z) = \frac{z}{1 - z - z^2}$$

Con lo cual termina la primera etapa de la solución. Hemos mostrado cómo convertimos una recurrencia en una ecuación normal acerca de la función generatriz. Cómo recuperar ahora la secuencia? En este caso, notemos que $F(z)$ se puede expandir en fracciones parciales

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{1 - \phi z} - \frac{1}{1 - \hat{\phi} z} \right)$$

donde $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$ y $\hat{\phi} = (1 - \sqrt{5})/2$. Esto ahora es fácil de invertir a partir de la tabla, resultando

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\phi^n - \hat{\phi}^n)$$

Veamos otro ejemplo más complicado. Tomemos la recurrencia que surge cuando se analiza el Quicksort.

$$T(n) = n - 1 + \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} T(i), \qquad T(0) = 0$$

vimos antes cómo invertir la suma, cuando llega hasta n (i.e. $t(z)/(1-z)$). En nuestro caso llega hasta $n-1$, lo que obliga a un desplazamiento (i.e. $zt(z)/(1-z)$). La división por n nos hace restarle $T(0) = 0$, dividir por z e integrar. Transformar $n-1$ es fácil a partir de la tabla. De modo que tenemos

$$t(z) = \frac{z}{(1-z)^2} - \frac{1}{1-z} + 2 \int \frac{t(z)}{1-z}$$

o, derivando,

$$t'(z) = \frac{2z}{(1-z)^3} + \frac{2t(z)}{1-z}$$

Esta vez la ecuación que define $t(z)$ es una ecuación diferencial. Esta es de la clase más simple (puede resolverse con Maple, por ejemplo)

$$t(z) = -2 \, \frac{z + \ln(1-z) + C}{(1-z)^2} = -2 \, \frac{z + C}{(1-z)^2} - 2 \, \frac{\ln 1 - z}{(1-z)^2}$$

donde C es la constante de integración. Si bien podemos manipular valores de la tabla para invertir esto, es ilustrativo resolverlo suponiendo que no sabemos cómo invertir el segundo término. La idea es expandir la función ln en su serie de Taylor:

$$\ln(1-z) = -\sum_{i\geq 1} z^i/i$$

de modo que nuestra fracción original se puede expresar como la suma de coeficientes de la forma

$$-\frac{z^i}{i(1-z)^2}$$

cuyo n-ésimo término es $(n+1-i)/i$ (y cero para $n+1<i$). De modo que tenemos

$$[z^n]\frac{\ln 1-z}{(1-z)^2} = -[z^n]\sum_{i\geq 1}\frac{z^i}{i(1-z)^2} = -\sum_{i\geq 1}[z^n]\frac{z^i}{i(1-z)^2}$$

suma que se limita por la condición $i \leq n+1$:

$$-\sum_{i=1}^{n+1}\frac{n+1-i}{i} = -(n+1)\sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{i} + (n+1) = -(n+1)(H_{n+1}-1)$$

con lo cual podemos invertir nuestra función completa

$$T(n) = -2n - 2(n+1)C + 2(n+1)(H_{n+1}-1)$$

se puede hallar $C=0$ igualando $T(0)=0$, de modo que

$$T(n) = 2(n+1)H_{n+1} - 4n - 2$$

Aquí ilustramos una forma de antitransformar funciones cuando no se parece a nada conocido: expandirla en serie de potencias y obtener el coeficiente n-ésimo. Otra forma es usar Taylor: como sabemos que

$$f(z) = \sum_{n\geq 0}\frac{f^{(n)}(0)z^n}{n!}$$

resulta que $a_n = f^{(n)}(0)/n!$. De modo que se puede ir obteniendo las sucesivas derivadas de $f(z)$, evaluarlas en 0, dividirlas por $n!$ y tendremos los coeficientes a_n. Si logramos hallar la forma general de estos coeficientes, habremos antitransformado la función.

La técnica general es entonces la siguiente:

- Dada la recurrencia, transformar ambos lados de la ecuación. Los términos independientes de la recurrencia (ej. $n-1$) se transforman en funciones conocidas, y los elementos de la recurrencia (ej. a_n, a_{n-1}) en expresiones sobre la función generatriz (ej. $a(z), za(z)$). Prestar atención a que la recurrencia sea válida PARA TODO $n \geq 0$.
- A partir de la ecuación, resolverla para obtener una expresión para la función generatriz.
- Una vez esto, antitransformar para obtener la solución de la recurrencia. Para lograr esto se puede recurrir a funciones conocidas, a modificaciones sobre ellas (desplazamientos, etc.), o a mirar su expansión en series para intentar obtener la expresión.