El Teorema de Incompletitud de Gödel
(Versión para no iniciados)

Claudio Gutiérrez*

> ... veinticinco símbolos suficientes (veintidós letras, el espacio, el punto, la coma) cuyas variaciones con repetición abarcan todo lo que es dable expresar: en todas las lenguas. El conjunto de tales variaciones integraría una Biblioteca Total, de tamaño astronómico [...]
>
> Todo estaría en sus ciegos volúmenes. Todo: la historia minuciosa del porvenir, *Los egipcios* de Esquilo, el número preciso de veces que las aguas del Ganges han reflejado el vuelo de un halcón, el secreto y verdadero nombre de Roma, la enciclopedia que hubiera edificado Novalis, mis sueños y entresueños en el alba del catorce de agosto de 1934, la demostración del teorema de Pierre Fermat, los no escritos capítulos de *Edwin Drood*, esos mismos capítulos traducidos al idioma que hablaron los garamantas, las paradojas de Berkeley acerca del tiempo y que no publicó, los libros de hierro de Urizen, las prematuras epifanías de Stephen Dedalus que antes de un ciclo de mil años nada querrían decir, el evangelio gnóstico de Basílides, el cantar que cantaron las sirenas, el catálogo fiel de la Biblioteca, la demostración de la falacia de ese catálogo. Todo, ...
>
> La Biblioteca Total,
> J. L. Borges.

Situémonos en los comienzos de los años treinta. En el ambiente lógico-matemático se trabaja febrilmente buscando llevar a feliz término un programa que se arrastra desde finales del siglo XIX, cuyas ideas se pueden rastrear en los escritos de lógicos medievales como Raimundo Lulio, en Leibniz, en todos quienes alguna vez soñaron con mecanizar el razonamiento, y cuyo principal impulsor es el famoso matemático David Hilbert. Este programa consiste en la *formalización total del razonamiento matemático* y su

*En Revista Cubo Mat. Educ., Universidad de la Frontera, Vol. 1, 1999 (68-75)

culminación sería la *demostración de la consistencia de las matemáticas*, es decir, la prueba formal de que las matemáticas no son un sistema contradictorio. O para usar la metáfora de Borges, el proyecto consiste en construir un catálogo fiel de las matemáticas y demostrar que no es contradictorio.

La insistencia en estos temas relativamente esotéricos tenía fuertes motivaciones prácticas. Por un lado los fundamentos del análisis matemático, especialmente el tratamiento del sospechoso concepto de número infinitesimal, hizo imperiosa la necesidad de contar con algún sistema formal que haga más evidente las posibles fallas en que se incurre al razonar. Por otro lado, a fines del siglo XIX se había descubierto varias paradojas en ciertos sistemas formales. Así, los *fundamentos* mismos de la ciencia "más segura", la ciencia "exacta" por antonomasia, se veían temblorosos. Esa vergënza no le convenía a nadie. El ilimitado optimismo, tantas veces ciego, de la comunidad científica, rápidamente encontró el remedio: demostrar formalmente que las matemáticas son consistentes. Uno ya puediera husmear aquí cierta circularidad del intento: ¿no se está usando el mismo lente para examinar la calidad del lente?

Pero los triunfos parciales que se conseguían envalentonaban hasta a los más escépticos: el monumental tratado *Principia Mathematica* de Whitehead y Russell por un lado, y la emergente *teoría de conjuntos* por otro, despacharon casi de una plumada el primer problema a que aludíamos: ambos son sistemas formales en los cuales se puede expresar toda la matemática conocida. Sólo quedaba entonces demostrar que esos sistemas eran consistentes. Las esperanzas crecían pues se obtenían algunos resultados bastante interesantes en esa dirección. Entre los más importantes habría que señalar la demostración de la consistencia de la teoría de números, con un postulado de inducción algo más débil que el usual, que logró Ackermann en 1924-5 y Von Neumann en 1927, ambos discípulos de Hilbert.

Al llegar el año 1930 la tarea central era la demostración de la consistencia del análisis clásico, que puede ser visto como una extensión de la aritmética si le agregamos conjuntos de números y algunos axiomas que los gobiernen. Para los optimistas de siempre, el cumplimiento del programa formalista de Hilbert era cuestión de tiempo y paciencia. De hecho, el joven Kurt Gödel se propuso a mediados de 1930, asumiendo (grosso modo) la consistencia de la aritmética, intentar demostrar la consistencia del análisis clásico. Mientras más trabajaba en el problema, más consciente se iba haciendo de que el proyecto era imposible. Y así, por esas ironías del destino, quien estuvo más cerca de llevar a cabo el programa de Hilbert fué precisamente quien le dió el tiro de gracia. Así nacía el, sin duda, más famoso teorema de la lógica matemática.

El trabajo de Gödel titulado *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme* (Sobre sentencias formalmente indecidibles de Principia Mathematica y Sistemas afines), de modestas 25 páginas, fué escrito el año 1930 y publicado en 1931 en la revista Monatshefte für Mathematik und Physik. Allí Gödel se propone como objetivo principal demostrar lo que hoy se conoce como el "teorema de incompletitud de Gödel". Dejemos que él mismo nos explique, con las palabras introductorias de su artículo, en que consiste:

> Como es sabido, el progreso de la matemática hacia una exactitud cada vez mayor ha llevado a la formalización de amplias partes de ella, de tal modo que las deducciones pueden llevarse a cabo según unas pocas reglas mecánicas. Los sistemas formales más amplios construídos hasta ahora son el sistema de *Principia Mathematica* (PM) y la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel (desarrollada aún más por J. von Neumann).
>
> Estos dos sistemas son tan amplios que todos los métodos usados hoy día en la matemática pueden ser formalizados en ellos, es decir, pueden ser reducidos a unos pocos axiomas y reglas de inferencia. Resulta por tanto natural la conjetura de que estos axiomas y reglas basten para decidir *todas* las cuestiones matemáticas que puedan ser formuladas en dichos sistemas.[1] En lo que sigue se muestra que esto no es así, sino que por el contrario, en ambos sistemas hay problemas relativamente simples de la teoría de los números naturales que no pueden ser decididos con sus axiomas (y reglas).[2]

Y a continuación esboza la idea de la demostración, que es lo que expondremos aquí con ligeras modificaciones para mejor entendimiento. Gödel

[1]El importante problema conocido como *completitud* o *suficiencia* de un determinado sistema formal. En 1930 el mismo Gödel había demostrado en otro famoso teorema, la *completitud* de la lógica (pura) de primer orden (la lógica "usual"). En una frase, este teorema dice que los axiomas y reglas de deducción usuales son suficientes para decidir todas las cuestiones lógicas que pudieran ser formuladas allí.

[2]Sigo aquí y en lo sucesivo la traducción Jesús Mosterín (ver referencias al final).

trabaja en el sistema formal de los PM; nosotros trabajaremos en un sistema formal que llamaremos **N**, que el lector, para ganar intuición, puede pensarlo como una axiomatización de la aritmética de los números naturales. Supondremos entonces, que tenemos un sistema de axiomas y reglas de deducción que permiten deducir afirmaciones en **N**. La demostración consiste en encontrar una oración F del sistema **N** con la propiedad de que ella ni su negación, $\neg F$, son deducibles en **N**. Bosquejemos los pasos uno por uno.

1. El lenguaje de un sistema formal consta de ciertos signos primitivos ("veinticinco símbolos suficientes ..."). Podemos mencionar variables, constantes lógicas como $\neg$, $\wedge$, $\forall$, paréntesis y constantes no lógicas, que en nuestro basta con considerar $+$ (adición) y 1 (uno).

2. Las fórmulas de un sistema formal son ciertas sucesiones finitas de esos signos, por ejemplo $\forall x \neg(x = 1 + 1)$ es una fórmula. También hay otras sucesiones de símbolos que no tienen significado alguno como por ejemplo $\vee\neg 11+$. No es difícil indicar un método por el cual reconocer unas y otras.

   Hay ciertas fórmulas especiales, las *oraciones*, de las cuales tiene sentido preguntar si son deducibles o no usando los axiomas y reglas de deduccion que el sistema tenga.

3. Es posible codificar *todas* las fórmulas por medio de números naturales de tal forma que a cada fórmula F le corresponda un número natural diferente, el *código* de F, que denotaremos por $[F]$.[3]

4. Las fórmulas con una variable libre (informalmente, fórmulas a las que les falta un dato para ser oraciones, como "x es un número par"; si

[3]Esto es lo que se conoce como numeración de Gödel. En su trabajo Gödel usa un método ingenioso que aprovecha ciertas propiedades de los números primos. Le asigna un número a cada uno de los signos primitivos, por ejemplo al 1 le asignamos el 1 (no confundir el primer 1, un símbolo, con el segundo, un número), al símbolo $+$ le asignamos el 3, al síbolo $=$ le asignamos el 5, a la variable x el 7 y así sucesivamente. A continuación le asignamos números a cada una de las fórmulas (que son sucesiones de signos), interpretando la sucesión de números (que corresponde a la fórmula) como potencias de los números primos $2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots$ Por ejemplo, a la fórmula $x = 1 + 1$ (la sucesión 7,5,1,3,1) le corresponderá el número $2^7 3^5 5^1 7^3 11^1 = 586776960$. De esta forma cada fórmula representa un único número, y viceversa, cada número, debido a la descomposición única en los números primos, representará una única sucesión de símbolos.

reemplazamos x por un número concreto, tenemos una oración, por ejemplo "5 es un número par") jugarán un papel importante. Ordenemos en una lista todas esta fórmulas:

$$F_1(x),\ F_2(x),\ F_3(x), \ldots$$

Es importante observar que las fórmulas en el lenguaje de **N** con una variable libre codifican conjuntos de números. La idea es sencilla: la fórmula $F(x)$ representará el conjunto de todos los números n para los cuales $F(n)$ es deducible en el sistema **N**.

5. Entonces viene la parte más importante (y técnica) de la demostración, y que cubre casi todo el trabajo de las 25 páginas. Se demuestra que también todos los conceptos meta-matemáticos que ocuparemos, como "fórmula", "ser deducible en **N**", "sustitución de variable", etc., se pueden codificar en el sistema formal **N**.[4]

6. En particular, se demuestra que existe una fórmula, que llamaremos $\mathrm{Dem}(x)$, en el lenguaje de **N**, que codifica el conjunto de todas las oraciones que son deducibles en **N**. Es decir, $\mathrm{Dem}(x)$ tiene la propiedad de que si F es una oración en **N**, entonces la oración $\mathrm{Dem}([F])$ *es deducible en* **N** *si y sólo si* F *es deducible en* **N**.

   Vale la pena detenerse un momento a meditar sobre los atisbos de autoreferencia que comienzan a aparecer aquí: fórmulas "hablando" de fórmulas.

7. Definimos a continuación un conjunto de números, que denotaremos con la letra K, por la siguiente fórmula (donde el signo $\neg$ denota negación):
$$n \in K \iff \neg\mathrm{Dem}([F_n(n)])$$

[4] De aquí surgen las condiciones mínimas que debe cumplir el sistema **N** para que todo el argumento funcione. Gödel usó el poderoso sistema de PM, pero de hecho ocupó esencialmente aspectos elementales de la teoría de números. Por ejemplo **N** puede ser la aritmética de Peano. De hecho estas condiciones se pueden debilitar un poco más aún. Por supuesto que se necesita también que la teoría **N** sea consistente. De hecho, en su demostración Gödel necesita algo más: ω-consistencia. No entraremos en ese detalle pues no cambia el argumento, y el teorema, con un poquito más de trabajo, se puede demostrar sin esa hipótesis.

Observemos que, usando la definición de Dem dada en (6), podemos concluir que $n \in K$ *si y sólo si la oración* $F_n(n)$ *no es deducible en* $\mathbf{N}$.

8. Puesto que todos los conceptos que aparecen en la definición en (7) son formalizables en $\mathbf{N}$, también lo es el conjunto K. Por lo tanto hay una fórmula de la lista en (4) que codifica el conjunto K, supongamos que es la q-ésima de la lista. Es decir tenemos entonces que $n \in K$ *si y sólo si* $F_q(n)$ *es deducible en* $\mathbf{N}$.

9. Consideremos entonces la fórmula $F_q(q)$.

   Si suponemos que $F_q(q)$ es deducible en $\mathbf{N}$, entonces por (7), $q \notin K$. Pero esto significa, por (8), que $F_q(q)$ no es deducible en $\mathbf{N}$.

   Si por el contrario, suponemos que $F_q(q)$ no es deducible en $\mathbf{N}$, entonces, por (7), $q \in K$. Pero entonces, por (8), $F_q(q)$ es deducible en $\mathbf{N}$.

Es decir, es imposible que $F_q(q)$ sea deducible en $\mathbf{N}$ (pues suponerlo lleva a una contradicción). También es imposible que $\neg F_q(q)$ sea deducible en $\mathbf{N}$, pues si suponemos que $\neg F_q(q)$ es deducible, entonces como $\mathbf{N}$ es consistente, $F_q(q)$ no es deducible, pero eso significa que $F_q(q)$ es deducible, contradicción. Es decir, demostramos:

Teorema 1 (Gödel, 1931) *La oración* $F_q(q)$ *es* indecidible *en* $\mathbf{N}$*, es decir en* $\mathbf{N}$ *no se puede deducir* $F_q(q)$ *ni su negación.*

Gödel acota en este punto:

> La analogía de esta argumentación con la antinomia de Richard salta a la vista; también está íntimamente relacionada con la paradoja del "mentiroso", pues la oración indecidible $F_q(q)$ dice que q pertenece a K, es decir según (7), que $F_q(q)$ no es deducible. Así pues, tenemos ante nosotros una oración que afirma su propia indeducibilidad. Evidentemente el método de prueba que acabamos de exponer es aplicable a cualquier sistema formal que, en primer lugar, interpretado naturalmente, disponga de medios de expresión suficientes para definir los conceptos que aparecen en la argumentación anterior especialmente el concepto de "fórmula deducible" y en el cual, en segundo lugar, cada fórmula deducible sea verdadera en la interpretación natural.

Con este resultado Gödel echa por tierra el famoso "axioma de la solubilidad de todo problema matemático" que postulaba Hilbert[5] (y en su corazoncito cada matemático). Pero las sorpresas no acaban aquí. De hecho, el resultado más importante desde el punto de vista de los fundamentos de los sistemas formales es la "sorprendente consecuencia" del resultado anterior, que Gödel agrega inmediatamente al final de su trabajo (con el ofrecimiento nunca cumplido de demostrarlo *rigurosamente* más adelante) y expresada en su teorema XI, que dice esencialmente que no es posible demostrar la consistencia de un sistema formal en su propio marco.

Teorema 2 (Gödel, 1931) *Sea A un sistema consistente de axiomas que sea mínimamente expresivo (véase la nota al pié de página número 4). Entonces la consistencia de A no es demostrable en A.*

Veamos cómo probar esto para el sistema **N**. Se demuestra que la oración "**N** es consistente" se puede codificar con una oración de **N**, llamémosla Cons. Consideremos entonces la fórmula Cons $\Rightarrow F_q(q)$, que interpretada en **N** dice "si **N** es consistente, entonces $F_q(q)$ es deducible en **N**". No es difícil demostrar que esta fórmula es deducible en **N**. Supongamos entonces que **N** pueda demostrar su propia consistencia, es decir que Cons se puede deducir en **N**. Entonces por modus ponens, $F_q(q)$ sería deducible en **N**, lo que sabemos, por el Teorema anterior, que es falso. Por lo tanto **N** *no* puede demostrar su propia consistencia.

Después de todo esto Gödel comenta:

> La prueba entera del teorema XI [nuestro Teorema 2] puede trasladarse a la teoría axiomática de conjuntos M y a la matemática clásica axiomática A, y también aquí obtenemos el mismo resultado: No hay prueba alguna de la consistencia de M (de A) que pueda ser formalizada en M (en A), suponiendo que M (A) sea consistente.

[5]En las palabras de su famoso discurso de 1900: "Es probablemente este importante hecho [se refiere a que importantes y viejos problemas finalmente han encontrado completa y rigurosa solución] junto a otras razones filosóficas lo que da origen la convicción —que todo matemático comparte, pero nadie hasta el momento ha apoyado con una demostración— de que todo problema matemático definido debe necesariamente ser susceptible de una exacta solución, ya sea en la forma de una respuesta concreta a la cuestión planteada, o por la demostración de la imposibilidad de su solución y por consiguiente el necesario fracaso de todos los intentos."

No es difícil imaginar el impacto que estos resultados provocaron en la época. Al extremo que el mismo Gödel intenta suavizarlos comentando al final de su trabajo: "Hagamos notar explícitamente que el teorema XI (y los resultados correspondientes sobre M y A) no se oponen al punto de vista formalista de Hilbert", y en un par de líneas propone algunas ampliaciones del concepto de formalismo que habría que considerar para rescatar el programa formalista después de este serio revés. Nunca es triste la verdad, lo que no tiene el remedio: el golpe en el terreno de los fundamentos de las matemáticas fué brutal y remeció hasta sus cimientos las formas de entender los formalismos. Los ecos los seguimos escuchando hoy día.

Referencias. Existe abundante literatura sobre este tema. Seleccionamos a continuación aquellos que nos parecen más relevantes para profundizar y algunos que debieran ser más fácilmente accesible a lectores de habla hispana.

1. Hay traducción castellana por Jesús Mosterín de los principales escritos de Gödel en K. Gödel, *Obras Completas*, Alianza Editorial, Madrid, 1981.

2. Existen apuntes del grupo de lógica matemática de la Universidad Católica de Chile, Santiago, que tocan el tema (Contactar a la Prof. Irene Mikenberg). (En Temuco, contactar a la Prof. Elena Olivos del Dept. de Matemáticas de la UFRO sobre bibliografía accesible.)

3. Casi cualquier texto sobre lógica matemática contiene obligadamente un capítulo sobre el Teorema de Incompletitud de Gödel.

4. Para quien desee compenetrarse más con la obra de Gödel, la referencia obligada es: Kurt Gödel, *Collected Works*, Vol. I (1986), Vol. II(1992), Vol. III(1995), Oxford University Press. Cada artículo contiene una muy buena introducción y comentarios por destacados lógicos matemáticos.

5. En el reciente libro de Roberto Torreti, *El Paraíso de Cantor (la tradición conjuntista en la filosofía matemática)*, Editorial Universitaria, Chile, 1998, hay al menos un capítulo donde se discute este tema desde un punto de vista más filosófico (desafortunadamente con una notación algo complicada). Un libro muy interesante.

6. Una profunda discusión sobre los fundamentos de la lógica (que va más allá de los tradicionales formalismos) se encuentra en el libro del conocido lógico brasileño Newton C.A. da Costa, *Ensaio sobre os fundamentos da lógica*, Editora Hucitec, São Paulo, 1994. Para quien esté motivado filosóficamente este librito será un verdadero hallazgo.

7. Una biografía y recuerdos personales sobre Gödel se encuentran en Hao Wang, *Reflections on Kurt Gödel*, MIT Press, 1987. Un lindo y entretenido libro escrito por un destacado lógico quien fué amigo personal de Gödel.