Lógica para Computación. Clase Auxiliar 5

Profesor: Claudio Gutiérrez. Profesor Auxiliar: Eduardo Jara

05 de agosto de 2003

1. Suponiendo que se pueden realizar las siguientes reacciones químicas:

   $MgO + H_2 \rightarrow Mg + H_2O$

   $C + O_2 \rightarrow CO_2$

   $CO_2 + H_2O \rightarrow H_2CO_3$

   y que se dispone de algunas cantidades de MgO, H_2, O_2 y C, se afirma que se puede producir H_2CO_3

   a) Represente toda esta situación, incluyendo la afirmación, en lógica proposicional.

Problema	Modelo
$MgO + H_2 \rightarrow Mg + H_2O$	$MgO \wedge H_2 \rightarrow Mg \wedge H_2O$
$C + O_2 \rightarrow CO_2$	$C \wedge O_2 \rightarrow CO_2$
$CO_2 + H_2O \rightarrow H_2CO_3$	$CO_2 \wedge H_2O \rightarrow H_2CO_3$
se dispone de algunas cantidades de MgO, H_2, O_2 y C	$MgO \wedge H_2 \wedge O_2 \wedge C$
se afirma que se puede producir H_2CO_3	H_2CO_3

   La situación en términos de consecuencia lógica se puede expresar como:

   $\{MgO \wedge H_2 \rightarrow Mg \wedge H_2O,\ C \wedge O_2 \rightarrow CO_2,\ CO_2 \wedge H_2O \rightarrow H_2CO_3,\ MgO \wedge H_2 \wedge O_2 \wedge C\} \models H_2CO_3$

   b) Explique en forma precisa la relación entre el problema original y la representación proposicional.

   La representación proposicional modela las reacciones químicas como implicaciones de la forma *si existen tales compuestos, entonces se generan estos otros compuestos*. La disponibilidad de ciertos compuestos se representa mediante literales positivos que indican que se cumple un cierto *hecho*, en este caso la presencia de un compuesto. La afirmación también se expresa como un literal positivo que indica la producción (existencia) del compuesto H_2CO_3. La consecuencia lógica indica que a partir de las reglas (reacciones químicas) y los ciertos hechos (existencia de ciertos compuestos) se deduce lógicamente otro hecho (la producción de otro compuesto).

   c) Demuestre formalmente usando **resolución** que la afirmación es correcta.

   En primer lugar se deben transformar todas las fórmulas a cláusulas. En este caso, las tres implicaciones deben llevarse a FNC. Agregando la negación de la meta, se obtiene el siguiente conjunto de cláusulas:
   $\{\neg MgO \vee \neg H_2 \vee Mg,\ \neg MgO \vee \neg H_2 \vee H_2O,\ \neg C \vee \neg O_2 \vee CO_2,\ \neg CO_2 \vee \neg H_2O \vee H_2CO_3,\ MgO,\ H_2,\ O_2,\ C,\ \neg H_2CO_3\}$

(1)	$\neg MgO \vee \neg H_2 \vee H_2O$	(por hipótesis)
(2)	MgO	(por hipótesis)
(3)	$\neg H_2 \vee H_2O$	(por resolución de (1) y (2))
(4)	$\neg C \vee \neg O_2 \vee CO_2$	(por hipótesis)
(5)	C	(por hipótesis)
(6)	$\neg O_2 \vee CO_2$	(por resolución de (4) y (5))
(7)	O_2	(por hipótesis)
(8)	CO_2	(por resolución de (6) y (7))
(9)	$\neg CO_2 \vee \neg H_2O \vee H_2CO_3$	(por hipótesis)
(10)	$\neg H_2O \vee H_2CO_3$	(por resolución de (8) y (9))
(11)	H_2	(por hipótesis)
(12)	H_2O	(por resolución de (3) y (11))
(13)	H_2CO_3	(por resolución de (10) y (12))
(14)	$\neg H_2CO_3$	(por hipótesis)
(15)	$\Box$	(por resolución de (13) y (14))

2. Demuestre que la regla de resolución es correcta en el sentido que la resolvente es consecuencia lógica de las clásulas progenitoras.

   Regla de resolución : Si $\{l_1, \ldots, l_s\}$ y $\{l'_1, \ldots, l'_t\}$ son cláusulas, donde, digamos, l_s y l'_t son literales complementarios (uno es la negación del otro), entonces pásese a la cláusula $(\{l_1, \ldots, l_s\} - \{l_s\}) \cup (\{l'_1, \ldots, l'_t\} - \{l'_t\})$. Esquemáticamente:

$$\begin{array}{c} l_1 \vee \ldots \vee l_{s-1} \vee l_s \\ l'_1 \vee \ldots \vee l'_{t-1} \vee l'_t \\ \hline l_1 \vee \ldots \vee l_{s-1} \vee l'_1 \vee \ldots \vee l'_{t-1} \end{array}$$

   Se debe demostrar que:

   $\{l_1 \vee \ldots \vee l_{s-1} \vee l_s,\ l'_1 \vee \ldots \vee l'_{t-1} \vee l'_t\} \models l_1 \vee \ldots \vee l_{s-1} \vee l'_1 \vee \ldots \vee l'_{t-1}$

   Esto, por el teorema de la Deducción, es lo mismo que:

   $\models (l_1 \vee \ldots \vee l_{s-1} \vee l_s) \wedge (l'_1 \vee \ldots \vee l'_{t-1} \vee l'_t) \rightarrow (l_1 \vee \ldots \vee l_{s-1} \vee l'_1 \vee \ldots \vee l'_{t-1})$

   Usando el método de tableaux

$$\begin{array}{l} (1)\ T\ (l_1 \vee \ldots \vee l_{s-1} \vee l_s) \\ (2)\ T\ (l'_1 \vee \ldots \vee l'_{t-1} \vee l'_t) \\ (3)\ F\ (l_1 \vee \ldots \vee l_{s-1} \vee l'_1 \vee \ldots \vee l'_{t-1}) \\ \quad F\ l_1 \quad (3) \\ \quad \ldots \\ \quad F\ l_{s-1}\ (3) \\ \quad \ldots \\ \quad F\ l'_1 \quad (3) \\ \quad \ldots \\ \quad F\ l'_{t-1}\ (3) \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c|c|c} T\ l_1\ (1) & \ldots & T\ l_{s-1}\ (1) & T\ l_s\ (1) \\ \mathrm{X} & \mathrm{X} & \mathrm{X} & \begin{array}{c|c|c|c} T\ l'_1\ (2) & \ldots & T\ l'_{t-1}\ (2) & T\ l'_t\ (2) \\ \mathrm{X} & \mathrm{X} & \mathrm{X} & \mathrm{X} \end{array} \end{array}$$

   Recuérdese que $T\ l'_t$ es igual a $F\ l_s$, pues l'_t y l_s son literales complementarios.

3. Demuestre, según se indicó en el texto, que el método de refutaciones por resolución es correcto en el sentido que si él conduce a partir de un conjunto de cláusulas Σ a la cláusula vacía, entonces Σ es inconsistente.

   Este teorema es fácil de demostrar por inducción en el largo n de la refutación $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ (donde φ_n es $\square$) usando la corrección de la regla de resolución.

   Demostraremos que toda fórmula de la refutación es consecuencia lógica del conjunto original de fórmulas Σ.

   Casos base, $1 \leq n \leq 2$. En este caso las fórmulas de la secuencia $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ necesariamente pertenecen a Σ, por lo tanto $\Sigma \models \varphi_1$ y $\Sigma \models \varphi_2$.

   Supongamos que existe una secuencia $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}\}$ de fórmulas obtenidas a partir de Σ por el método de resolución, es decir, cada fórmula es una fórmula de Σ o se obtuvo de los fórmulas precedentes por la regla de resolución. Por hipótesis de inducción se cumple $\Sigma \models \varphi_i$, para $1 \leq i \leq n-1$.

   Si agregamos una nueva fórmula a la secuencia, tenemos tres casos:

   a) $\varphi_n \in \Sigma$, en este caso se cumple de forma inmediata que $\Sigma \models \varphi_n$.

   b) φ_n se obtiene por la regla de resolución de $\varphi_i \in \Sigma$ y $\varphi_j \in \Sigma$, por la corrección de la regla de resolución, tenemos que $\varphi_i, \varphi_j \models \varphi_n$; y por la propiedad de monotonía, tenemos que $\Sigma \models \varphi_n$.

   c) φ_n se obtiene por la regla de resolución de φ_i y φ_j, por hipótesis de inducción se cumple que $\Sigma \models \varphi_i$ y $\Sigma \models \varphi_j$, además, por la corrección de la regla de resolución, se cumple $\varphi_i, \varphi_j \models \varphi_n$.

      Basándose en la definición de consecuencia lógica, sea $\{\sigma_x\}$ el conjunto de todas las valuaciones tales que, si se cumple $\sigma_x(\Sigma) = 1$, entonces $\sigma_x(\varphi_i) = 1$ y $\sigma_x(\varphi_j) = 1$. Además, sea $\{\sigma_y\}$ el conjunto de todas la valuaciones tales que, si se cumple $\sigma_y(\{\varphi_i, \varphi_j\}) = 1$ entonces $\sigma_y(\varphi_n) = 1$. Es claro que $\{\sigma_x\} \subseteq \{\sigma_x\}$, por lo tanto $\sigma_x(\varphi_n) = 1$. Es decir, $\Sigma \models \varphi_n$.

   Corolario: Si φ_n es $\square$, entonces, de acuerdo al teorema recién demostrado, $\Sigma \models \square$, es decir, Σ es inconsistente.

4. Construya demostraciones por resolución para establecer que:

   a) $(p \vee \neg q \vee r) \wedge \neg p \wedge (q \wedge r \wedge p) \wedge (p \vee \neg r)$ no es satisfacible.

      Cláusulas: $\{(p \vee \neg q \vee r),\ \neg p,\ q,\ r,\ p,\ (p \vee \neg r)\}$

(1)	$\neg p$	(por hipótesis)
(2)	p	(por hipótesis)
(3)	$\square$	(por resolución de (1) y (2))

   b) $p \vee (q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r)$ es tautología.

      Si negamos esta fórmula y demostramos que es no satisfacible, entonces es una tautotogía. La fórmula está en FND. Si la negamos obtenemos una fórmula en FNC y podemos aplicar directamente resolución.

Cláusulas: $\{\neg p,\ \neg q \vee \neg r,\ p \vee q,\ p \vee \neg q \vee r\}$

(1)	$\neg p$	(por hipótesis)
(2)	$p \vee q$	(por hipótesis)
(3)	q	(por resolución de (1) y (2))
(4)	$\neg q \vee \neg r$	(por hipótesis)
(5)	$\neg r$	(por resolución de (3) y (4))
(6)	$p \vee \neg q \vee r$	(por hipótesis)
(7)	$p \vee r$	(por resolución de (3) y (6))
(8)	p	(por resolución de (5) y (7))
(9)	$\square$	(por resolución de (1) y (8))

c) $\neg q, \neg p \vee r, \neg(r \wedge \neg q) \models \neg p$.

Para probar esta consecuencia lógica negamos la consecuencia y la agregamos a las cláusulas del antecedente, si el conjunto es inconsistente, entonces la consecuencia lógica original es correcta.

Cláusulas: $\{\neg q,\ \neg p \vee r,\ \neg r \vee q,\ p\}$

(1)	p	(por hipótesis)
(2)	$\neg p \vee r$	(por hipótesis)
(3)	r	(por resolución de (1) y (2))
(4)	$\neg r \vee q$	(por hipótesis)
(5)	q	(por resolución de (3) y (4))
(6)	$\neg q$	(por hipótesis)
(7)	$\square$	(por resolución de (5) y (6))

Nota: Estos ejercicios han sido tomados de *Lógica para Ciencia de la Computación. L. Bertossi. Cáp. 2.*