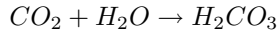
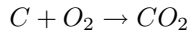
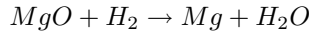


Lógica para Computación. Clase Auxiliar 5

Profesor: Claudio Gutiérrez. Profesor Auxiliar: Eduardo Jara
05 de agosto de 2003

1. Suponiendo que se pueden realizar las siguientes reacciones químicas:



y que se dispone de algunas cantidades de MgO , H_2 , O_2 y C , se afirma que se puede producir H_2CO_3

- a) Represente toda esta situación, incluyendo la afirmación, en lógica proposicional.

Problema	Modelo
$MgO + H_2 \rightarrow Mg + H_2O$	$MgO \wedge H_2 \rightarrow Mg \wedge H_2O$
$C + O_2 \rightarrow CO_2$	$C \wedge O_2 \rightarrow CO_2$
$CO_2 + H_2O \rightarrow H_2CO_3$	$CO_2 \wedge H_2O \rightarrow H_2CO_3$
se dispone de algunas cantidades de MgO , H_2 , O_2 y C	$MgO \wedge H_2 \wedge O_2 \wedge C$
se afirma que se puede producir H_2CO_3	H_2CO_3

La situación en términos de consecuencia lógica se puede expresar como:

$$\{MgO \wedge H_2 \rightarrow Mg \wedge H_2O, C \wedge O_2 \rightarrow CO_2, CO_2 \wedge H_2O \rightarrow H_2CO_3, MgO \wedge H_2 \wedge O_2 \wedge C\} \models H_2CO_3$$

- b) Explique en forma precisa la relación entre el problema original y la representación proposicional.

La representación proposicional modela las reacciones químicas como implicaciones de la forma *si existen tales compuestos, entonces se generan estos otros compuestos*. La disponibilidad de ciertos compuestos se representa mediante literales positivos que indican que se cumple un cierto *hecho*, en este caso la presencia de un compuesto. La afirmación también se expresa como un literal positivo que indica la producción (existencia) del compuesto H_2CO_3 . La consecuencia lógica indica que a partir de las reglas (reacciones químicas) y los ciertos hechos (existencia de ciertos compuestos) se deduce lógicamente otro hecho (la producción de otro compuesto).

- c) Demuestre formalmente usando **resolución** que la afirmación es correcta.

En primer lugar se deben transformar todas las fórmulas a cláusulas. En este caso, las tres implicaciones deben llevarse a FNC. Agregando la negación de la meta, se obtiene el siguiente conjunto de cláusulas: $\{\neg MgO \vee \neg H_2 \vee Mg, \neg MgO \vee \neg H_2 \vee H_2O, \neg C \vee \neg O_2 \vee CO_2, \neg CO_2 \vee \neg H_2O \vee H_2CO_3, MgO, H_2, O_2, C, \neg H_2CO_3\}$

(1)	$\neg MgO \vee \neg H_2 \vee H_2O$	(por hipótesis)
(2)	MgO	(por hipótesis)
(3)	$\neg H_2 \vee H_2O$	(por resolución de (1) y (2))
(4)	$\neg C \vee \neg O_2 \vee CO_2$	(por hipótesis)
(5)	C	(por hipótesis)
(6)	$\neg O_2 \vee CO_2$	(por resolución de (4) y (5))
(7)	O_2	(por hipótesis)
(8)	CO_2	(por resolución de (6) y (7))
(9)	$\neg CO_2 \vee \neg H_2O \vee H_2CO_3$	(por hipótesis)
(10)	$\neg H_2O \vee H_2CO_3$	(por resolución de (8) y (9))
(11)	H_2	(por hipótesis)
(12)	H_2O	(por resolución de (3) y (11))
(13)	H_2CO_3	(por resolución de (10) y (12))
(14)	$\neg H_2CO_3$	(por hipótesis)
(15)	\square	(por resolución de (13) y (14))

2. Demuestre que la regla de resolución es correcta en el sentido que la resolvente es consecuencia lógica de las cláusulas progenitoras.

Regla de resolución : Si $\{l_1, \dots, l_s\}$ y $\{l'_1, \dots, l'_t\}$ son cláusulas, donde, digamos, l_s y l'_t son literales complementarios (uno es la negación del otro), entonces pásese a la cláusula $(\{l_1, \dots, l_s\} - \{l_s\}) \cup (\{l'_1, \dots, l'_t\} - \{l'_t\})$. Esquemáticamente:

$$\frac{l_1 \vee \dots \vee l_{s-1} \vee l_s \quad l'_1 \vee \dots \vee l'_{t-1} \vee l'_t}{l_1 \vee \dots \vee l_{s-1} \vee l'_1 \vee \dots \vee l'_{t-1}}$$

Se debe demostrar que:

$$\{l_1 \vee \dots \vee l_{s-1} \vee l_s, l'_1 \vee \dots \vee l'_{t-1} \vee l'_t\} \models l_1 \vee \dots \vee l_{s-1} \vee l'_1 \vee \dots \vee l'_{t-1}$$

Esto, por el teorema de la Deducción, es lo mismo que:

$$\models (l_1 \vee \dots \vee l_{s-1} \vee l_s) \wedge (l'_1 \vee \dots \vee l'_{t-1} \vee l'_t) \rightarrow (l_1 \vee \dots \vee l_{s-1} \vee l'_1 \vee \dots \vee l'_{t-1})$$

Usando el método de tableaux

$$\begin{array}{l} (1) T (l_1 \vee \dots \vee l_{s-1} \vee l_s) \\ (2) T (l'_1 \vee \dots \vee l'_{t-1} \vee l'_t) \\ (3) F (l_1 \vee \dots \vee l_{s-1} \vee l'_1 \vee \dots \vee l'_{t-1}) \\ F l_1 \quad (3) \\ \dots \\ F l_{s-1} \quad (3) \\ \dots \\ F l'_1 \quad (3) \\ \dots \\ F l'_{t-1} \quad (3) \\ T l_1 (1) \quad | \quad \dots \quad | \quad T l_{s-1} (1) \quad | \quad T l'_1 (2) \quad | \quad \dots \quad | \quad T l'_{t-1} (2) \quad | \quad T l'_t (2) \\ X \quad \quad \quad | \quad X \quad \quad \quad | \quad X \quad \quad \quad | \quad X \quad \quad \quad | \quad X \quad \quad \quad | \quad X \quad \quad \quad | \quad X \end{array}$$

Recuérdese que $T l'_t$ es igual a $F l_s$, pues l'_t y l_s son literales complementarios.

3. Demuestre, según se indicó en el texto, que el método de refutaciones por resolución es correcto en el sentido que si él conduce a partir de un conjunto de cláusulas Σ a la cláusula vacía, entonces Σ es inconsistente.

Este teorema es fácil de demostrar por inducción en el largo n de la refutación $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ (donde φ_n es \square) usando la corrección de la regla de resolución.

Demostremos que toda fórmula de la refutación es consecuencia lógica del conjunto original de fórmulas Σ .

Casos base, $1 \leq n \leq 2$. En este caso las fórmulas de la secuencia $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ necesariamente pertenecen a Σ , por lo tanto $\Sigma \models \varphi_1$ y $\Sigma \models \varphi_2$.

Supongamos que existe una secuencia $\{\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}\}$ de fórmulas obtenidas a partir de Σ por el método de resolución, es decir, cada fórmula es una fórmula de Σ o se obtuvo de los fórmulas precedentes por la regla de resolución. Por hipótesis de inducción se cumple $\Sigma \models \varphi_i$, para $1 \leq i \leq n-1$.

Si agregamos una nueva fórmula a la secuencia, tenemos tres casos:

- a) $\varphi_n \in \Sigma$, en este caso se cumple de forma inmediata que $\Sigma \models \varphi_n$.
- b) φ_n se obtiene por la regla de resolución de $\varphi_i \in \Sigma$ y $\varphi_j \in \Sigma$, por la corrección de la regla de resolución, tenemos que $\varphi_i, \varphi_j \models \varphi_n$; y por la propiedad de monotonía, tenemos que $\Sigma \models \varphi_n$.
- c) φ_n se obtiene por la regla de resolución de φ_i y φ_j , por hipótesis de inducción se cumple que $\Sigma \models \varphi_i$ y $\Sigma \models \varphi_j$, además, por la corrección de la regla de resolución, se cumple $\varphi_i, \varphi_j \models \varphi_n$.

Basándose en la definición de consecuencia lógica, sea $\{\sigma_x\}$ el conjunto de todas las valuaciones tales que, si se cumple $\sigma_x(\Sigma) = 1$, entonces $\sigma_x(\varphi_i) = 1$ y $\sigma_x(\varphi_j) = 1$. Además, sea $\{\sigma_y\}$ el conjunto de todas la valuaciones tales que, si se cumple $\sigma_y(\{\varphi_i, \varphi_j\}) = 1$ entonces $\sigma_y(\varphi_n) = 1$. Es claro que $\{\sigma_x\} \subseteq \{\sigma_y\}$, por lo tanto $\sigma_x(\varphi_n) = 1$. Es decir, $\Sigma \models \varphi_n$.

Corolario: Si φ_n es \square , entonces, de acuerdo al teorema recién demostrado, $\Sigma \models \square$, es decir, Σ es inconsistente.

4. Construya demostraciones por resolución para establecer que:

- a) $(p \vee \neg q \vee r) \wedge \neg p \wedge (q \wedge r \wedge p) \wedge (p \vee \neg r)$ no es satisfacible.

Cláusulas: $\{(p \vee \neg q \vee r), \neg p, q, r, p, (p \vee \neg r)\}$

- (1) $\neg p$ (por hipótesis)
- (2) p (por hipótesis)
- (3) \square (por resolución de (1) y (2))

- b) $p \vee (q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r)$ es tautología.

Si negamos esta fórmula y demostramos que es no satisfacible, entonces es una tautología. La fórmula está en FND. Si la negamos

obtenemos una fórmula en FNC y podemos aplicar directamente resolución.

Cláusulas: $\{\neg p, \neg q \vee \neg r, p \vee q, p \vee \neg q \vee r\}$

- (1) $\neg p$ (por hipótesis)
- (2) $p \vee q$ (por hipótesis)
- (3) q (por resolución de (1) y (2))
- (4) $\neg q \vee \neg r$ (por hipótesis)
- (5) $\neg r$ (por resolución de (3) y (4))
- (6) $p \vee \neg q \vee r$ (por hipótesis)
- (7) $p \vee r$ (por resolución de (3) y (6))
- (8) p (por resolución de (5) y (7))
- (9) \square (por resolución de (1) y (8))

c) $\neg q, \neg p \vee r, \neg(r \wedge \neg q) \models \neg p$.

Para probar esta consecuencia lógica negamos la consecuencia y la agregamos a las cláusulas del antecedente, si el conjunto es inconsistente, entonces la consecuencia lógica original es correcta.

Cláusulas: $\{\neg q, \neg p \vee r, \neg r \vee q, p\}$

- (1) p (por hipótesis)
- (2) $\neg p \vee r$ (por hipótesis)
- (3) r (por resolución de (1) y (2))
- (4) $\neg r \vee q$ (por hipótesis)
- (5) q (por resolución de (3) y (4))
- (6) $\neg q$ (por hipótesis)
- (7) \square (por resolución de (5) y (6))

Nota: Estos ejercicios han sido tomados de *Lógica para Ciencia de la Computación. L. Bertossi. Cáp. 2.*