Lógica para Computación
Clase Auxiliar 3

Profesor: Claudio Gutiérrez
Profesor Auxiliar: Eduardo Jara
22 de agosto de 2003

1. Verificar si las siguientes relaciones de consecuencia lógica son o no verdaderas usando el concepto de valuación

   a) $\{p \to q, p\} \models q$

   Sabemos que lo anterior es lo mismo que decir que para cada valuación $\sigma : P \to \{0,1\}$, se cumple $\sigma \models \{p \to q, p\} \Rightarrow \sigma \models q$

   Lo que debemos hacer es "construir" una secuencia de "hechos" desde el antecedente de esta (meta)implicación y ver si es posible llegar a construir un "hecho" que sea igual al consecuente de la (meta) implicación.

   En primer lugar suponemos que el antecedente es verdadero. Es decir, asumimos que se cumple $\sigma \models \{p \to q, p\}$. Luego, por la definición de satisfacción sabemos que lo anterior es equivalente a:

   $\sigma \models (p \to q) \quad \text{y} \quad \sigma \models p$

   Para que esto se cumpla, necesariamente $\sigma(p) = 1$, por la aplicación de la definición de la satisfacción $\sigma \models p$. Por el mismo motivo, se cumple necesariamente $\sigma(p \to q) = 1$, pero ya sabemos que $\sigma(p) = 1$, por lo tanto se cumple necesariamente que $\sigma(q) = 1$. Pero esto último es sólo otra forma de escribir $\sigma \models q$, que es el "hecho" que queríamos "construir" para verificar la relación de consecuencia lógica.

   b) $\{(p \vee q) \to r, \neg r\} \models \neg p$

   c) $\emptyset \models ((p \to q) \to p) \to p$

d) $\models (p \to (\neg q \to F)) \to (p \to q)$. Donde F es una fórmula contradictoria cualquiera.

2. Verificar si las siguientes relaciones de consecuencia lógica son o no verdaderas usando tablas de verdad para determinar si existen o no valuaciones que violen la noción de consecuencia lógica.

   a) $\{p \to q, p\} \models q$

valuaciones			antecedentes		consecuente
	p	q	$p \to q$	p	q
σ_1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
σ_2	1	0	0	1	0
σ_3	0	1	1	0	1
σ_4	0	0	1	0	0

   Se debe verificar que cada valuación que satisfaga todas y cada una de las fórmulas del antecedente lógico también satisfaga el consecuente lógico. Como puede verse esto ocurre con la valuación σ_1. En las demás valuaciones a lo menos una de las fórmulas del antecedente no se satisface, por lo tanto no importa si el consecuente se satisface o no.

   b) $\{(p \vee q) \to r, \neg r\} \models \neg p$

3. Por el teorema de deducción sabemos que podemos reemplazar

   $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\} \models \psi$ por $\models (\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) \to \psi$

   Verificar si las siguientes relaciones de consecuencia lógica son o no verdaderas usando tablas de verdad para determinar si una fórmula que es consecuencia lógica del conjunto vacío de fórmulas es una tautología, una contradicción o una contingencia.

   a) $\{p \to q, p\} \models q$

   Reescribimos la consecuencia lógica como

   $\models ((p \to q) \wedge p) \to q$

   La tabla de verdad es la siguiente:

valuaciones			subfórmulas				consecuente
	p	q	$p \to q$	p	$(p \to q) \wedge p$	q	$((p \to q) \wedge p) \to q$
σ_1	1	1	1	1	1	1	**1**
σ_2	1	0	0	1	0	0	**1**
σ_3	0	1	1	0	0	1	**1**
σ_4	0	0	1	0	0	0	**1**

En este caso debemos verificar que para cualquier valuación el consecuente (es decir, la fórmula completa) debe satisfacerse. Es decir, la última columna debe contener sólo 1's.

b) $\{(p \vee q) \to r, \neg r\} \models \neg p$

4. Verificar si las siguientes relaciones de consecuencia lógica son o no verdaderas usando el método de *Tableaux*. Para esto se debe llevar toda la consecuencia lógica "al lado derecho" usando el teorema Deducción y luego negarla para, aplicando el el método de *Tableaux*, determinar si se producen contradicciones en todas las ramas del árbol.

   a) $\{p \to q, p\} \models q$

   (1) $T(p \to q)$
   (2) Tp
   (3) Fq

(4) Fp (1)	(5) Tq (1)
X	X

   b) $\{(p \vee q) \to r, \neg r\} \models \neg p$

   (1) $T((p \vee q) \to r)$
   (2) $T\neg r$
   (3) $F\neg p$
   (4) Fr (2)
   (5) Tp (3)

(6) $F(p \vee q)$ (1)	(8) Tr (1)
(7) Fp (6)	X
X	

   c) $\emptyset \models ((p \to q) \to p) \to p$

   d) $\models (p \to (\neg q \to F)) \to (p \to q)$

e) $\models ((p \to q) \land (p \to r)) \to (p \to (q \land r))$

f) $\models (\neg p \lor \neg q) \to \neg(p \land q)$

g) $\models (p \lor (q \land r)) \to ((p \lor q) \land (p \lor r))$

5. Verificar si las siguientes relaciones de consecuencia lógica son verdaderas usando álgebra declarativa. Para esto se debe llevar toda la consecuencia lógica "al lado derecho" usando el teorema Deducción y luego se debe manipular algebraicamente de modo de llegar a una expresión mínima. Si esta expresión mínima es igual a V, entonces se tiene una tautología. Si la expresión mínima es igual a F se tiene una contradicción. (Utilice las leyes que se dan en la tabla que se encuentra al final del documento.)

   a) $\{p \to q, p\} \models q$

$(\neg p \lor q) \land p \to q$	definición de condicional
$\neg((\neg p \lor q) \land p) \lor q$	definición de condicional
$(\neg(\neg p \lor q) \lor \neg p) \lor q$	leyes de De Morgan
$((p \land \neg q) \lor \neg p) \lor q$	leyes de De Morgan
$(p \land \neg q) \lor (\neg p \lor q)$	leyes asociativas
$(p \lor \neg p \lor q) \land (\neg q \lor \neg p \lor q)$	leyes distributivas
$(V \lor q) \land (V \lor \neg p)$	ley de medio excluido
$V \land V$	leyes de dominación
V	leyes de identidad

   b) $\{(p \lor q) \to r, \neg r\} \models \neg p$

6. Existen formas estándar para las expresiones lógicas, a las que se les denomina *formas normales*. Existen dos tipos de formas normales, *formas normales disyuntivas* (FND) y *formas normales conjuntivas* (FNC). Se dice que una expresión lógica está en FND si está escrita como una disyunción, en la cual todos lo términos son conjunciones de literales. De modo similar , se dice que una expresión lógica está en FNC si está escrita como una conjunción de disyunciones de literales.

   Por ejemplo $(r \land \neg p) \lor (p \land q) \lor s$ está en FND, pero $\neg(p \land q) \lor r$ no lo es pues contine una subfórmula no atómica negada.

   Para llegar transformar una expresión cualquiera a su FNC o FND se debe:

- Eliminar todas las $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$.
- Utilizar la ley de doble negación y las leyes de De Morgan para reducir el alcance de las negaciones a variables proposicionales.
- Utilizar las leyes distributivas para reducir el alcance de $\wedge$ para la FND, y reducir el alcance de $\vee$ para la FNC.
- Por último se debe verificar si es posible simplificar aún más aplicando otras equivalencias algebraicas.

Lleve las siguientes expresiones a sus formas normales y minimícelas.

a) $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$

b) $(p \rightarrow (\neg q \rightarrow F)) \rightarrow (p \rightarrow q)$

c) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \rightarrow (r \vee q))$

d) $((p \vee q) \wedge (p \vee (r \wedge s))) \vee (p \wedge q \wedge s)$

Leyes	Nombre
$p \vee \neg p \equiv V$ $p \wedge \neg p \equiv F$	Ley de medio excluido Ley de contradicción
$p \vee F \equiv p$ $p \wedge V \equiv p$	Leyes de identiddad
$p \vee V \equiv V$ $p \wedge F \equiv F$	Leyes de dominación
$p \vee p \equiv p$ $p \wedge p \equiv p$	Leyes de idempotencia
$\neg\neg p \equiv p$	Leye de doble negación
$p \vee q \equiv q \vee p$ $p \wedge q \equiv q \wedge p$	Leyes conmutativas
$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$	Leyes de asociativas
$(p \vee q) \wedge (p \vee r) \equiv p \vee (q \wedge r)$ $(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \equiv p \wedge (q \vee r)$	Leyes de distributivas
$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$	Leyes de De Morgan
$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$	Definición de Condicional
$p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg q \wedge \neg p)$ $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	Definición de Bicondicional
$p \vee (p \wedge q) \equiv p$ $p \wedge (p \vee q) \equiv p$ $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q) \equiv q$ $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee q) \equiv q$	Leyes de absorción